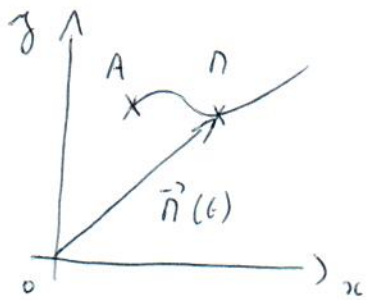
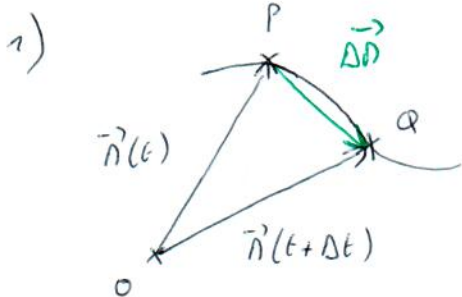


Exo 1: on considère une trajectoire quelconque dans le plan. On désigne par s l'abscisse curviligne le long de la trajectoire, ie la longueur de la trajectoire entre un point fixe A et un point Π quelconque de la trajectoire. Supposons que la trajectoire soit paramétrisée



par un paramètre t , ie le point A est décrit par le vecteur $\vec{r}(t_0)$ pour la valeur initiale t_0 du paramètre t , et un point quelconque Π de la trajectoire est décrit par le vecteur $\vec{r}(t)$, avec $t > t_0$.



Considérons maintenant deux points P et Q de la trajectoire, décrits par les vecteurs $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}(t + \Delta t)$. On construit le vecteur déplacement $\Delta \vec{r}$, défini par

$$\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

ie $\Delta \vec{r}$ est le vecteur joignant les points P et Q , $\Delta \vec{r} = \vec{PQ}$. Dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, le vecteur $\Delta \vec{r}$ se rapproche de plus en plus de la trajectoire à mesure que Q se rapproche de P . Ainsi, le vecteur

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

définit un vecteur tangent à la trajectoire au point P .

le vecteur unitaire tangent \vec{v} à la trajectoire s'obtient donc directement et on a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{n}/dt}{|d\vec{n}/dt|} \quad (1)$$

Relions maintenant \vec{v} à l'abscisse curviligne s . On dénote Δs la longueur de la corde entre les points P et Q , ie la variation de l'abscisse curviligne entre P et Q . Dans la limite où Δt est suffisamment petit (ie lorsque P et Q sont suffisamment proches), Δs peut être approximée par la longueur du segment entre P et Q , ie

$$\Delta s \approx |\Delta \vec{n}| = |\vec{n}(t + \Delta t) - \vec{n}(t)|$$

Dans cette limite $\Delta t \ll 1$ on peut développer $\vec{n}(t + \Delta t)$ en série de Taylor, et

$$\vec{n}(t + \Delta t) = \vec{n}(t) + \frac{d\vec{n}}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2)$$

d'où pour Δs , au premier ordre en Δt ,

$$\Delta s \approx \left| \frac{d\vec{n}}{dt} \right| \Delta t$$

et donc, dans la limite de variations infinitésimales,

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{n}}{dt} \right| \quad (2)$$

En combinant (1) et (2) on tire donc directement

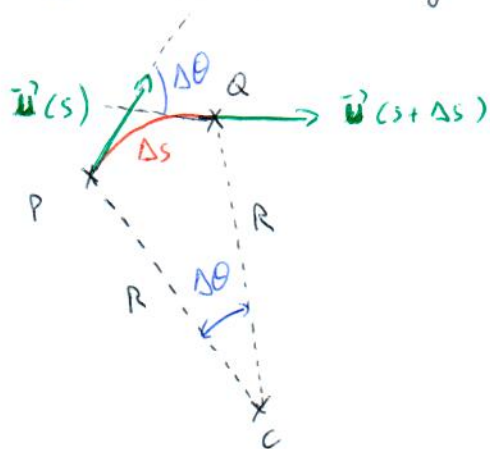
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{n}}{ds}} \quad (3)$$

2) Notons tout d'abord que l'on a par construction

(12)

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(s+\Delta s) - \vec{v}(s)}{\Delta s} \quad (4)$$

où $\vec{v}(s+\Delta s) - \vec{v}(s)$ est une différence de deux vecteurs appartenant au plan de la trajectoire. Ainsi, $d\vec{v}/ds$ est lui-même dans ce plan. On construit maintenant explicitement cette différence $\vec{v}(s+\Delta s) - \vec{v}(s)$ en considérant à nouveau deux points P et Q de la trajectoire, où les vecteurs tangents sont respectivement $\vec{v}(s)$ et $\vec{v}(s+\Delta s)$.



Lorsque P et Q sont suffisamment proches, la trajectoire entre P et Q peut être approximée par un cercle de centre C et rayon R, passant par P et Q. La portion d'arc entre P et Q est de longueur Δs

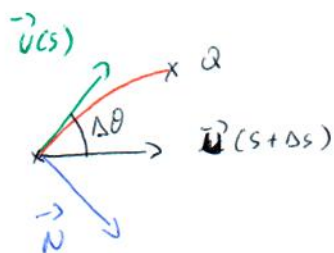
(variation d'abscisse curviligne) qui peut alors être approximée par la longueur de l'arc de cercle, ie

$$\Delta s \approx R \Delta \theta \quad (5)$$

On définit maintenant le vecteur \vec{N} comme étant le vecteur unitaire normal à $\vec{v}(s)$ et dirigé vers l'intérieur de la courbe. On doit donc montrer que ainsi défini ce vecteur \vec{N} satisfait la relation attendue.

Décomposons le vecteur $\vec{v}(s+\Delta s)$ selon les vecteurs $\vec{v}(s)$ et \vec{N} , on a

$$\vec{v}(s+\Delta s) = \|\vec{v}(s+\Delta s)\| \cos \Delta \theta \vec{v}(s) + \|\vec{v}(s+\Delta s)\| \sin \Delta \theta \vec{N}$$



soit, puisque $\vec{U}(s+\Delta s)$ est, par construction, unitaire

$$\vec{U}(s+\Delta s) = \cos \Delta\theta \vec{U}(s) + \sin \Delta\theta \vec{N}$$

On a donc, avec (5), et pour Δs suffisamment petit,

$$\vec{U}(s+\Delta s) - \vec{U}(s) = \left[\cos\left(\frac{\Delta s}{R}\right) - 1 \right] \vec{U}(s) + \sin\left(\frac{\Delta s}{R}\right) \vec{N}$$

et donc, avec un développement de Taylor,

$$\vec{U}(s+\Delta s) - \vec{U}(s) = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta s}{R}\right)^2 + \mathcal{O}(\Delta s^4) \right] \vec{U}(s) + \left[\frac{\Delta s}{R} + \mathcal{O}(\Delta s^3) \right] \vec{N} \quad (6)$$

En combinant (4) et (6) on obtient donc

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} \frac{\Delta s}{R^2} \vec{U}(s) + \frac{\vec{N}}{R} \right]$$

d'où effectivement

$$\boxed{\frac{d\vec{U}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R}} \quad (7)$$

3) On a donc construit aux questions 1) et 2) deux vecteurs unitaires \vec{U} et \vec{N} , perpendiculaires et appartenant au plan de la trajectoire. De plus, notons que

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{N}(s+\Delta s) - \vec{N}(s)}{\Delta s}$$

avec $\vec{N}(s+\Delta s) - \vec{N}(s)$ appartenant au plan de la trajectoire. Ainsi, dans le cas d'un mouvement plan, $d\vec{N}/ds$ appartient aussi au plan de la trajectoire. Or, puisque \vec{N} est par construction unitaire, ie

$$\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$$

on a, en dérivant par rapport à s ,

$$2 \vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0$$

soit

$$\frac{d\vec{N}}{ds} \perp \vec{N}$$

13

On, on connaît déjà, dans ce cas particulier d'un mouvement plan, le vecteur appartenant au plan de la trajectoire qui est de plus perpendiculaire à \vec{N} : c'est précisément le vecteur unitaire tangent \vec{U} . On voit donc que dans le cas d'une trajectoire plane on a

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \alpha \vec{U} \quad (8)$$

où α est une constante réelle à déterminer. On utilise maintenant le fait que $\vec{N} \perp \vec{U}$, ie

$$\vec{N} \cdot \vec{U} = 0$$

On obtient en dérivant par rapport à s

$$\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{U} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{U}}{ds} = 0$$

soit, avec (7) et (8),

$$\alpha \vec{U} \cdot \vec{U} + \frac{1}{R} \vec{N} \cdot \vec{N} = 0$$

et donc, puisque \vec{U} et \vec{N} sont unitaires,

$$\alpha = -\frac{1}{R}$$

En substituant cette valeur de α dans (8) on voit donc que $d\vec{N}/ds$ est relié à \vec{U} par

$$\boxed{\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{U}}{R}} \quad (9)$$

⚠ Insistons sur le fait que (9) est uniquement valable dans le cas particulier d'un mouvement plan. Pour une trajectoire quelconque dans \mathbb{R}^3 , on écrit dans (9) un terme supplémentaire dit de torsion.

4) Par définition, la vitesse \vec{v} de la particule est donnée par, avec (1)

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{M}}{dt} = \left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right| \vec{u}$$

soit avec (2) et en notant $ds/dt \equiv \dot{s}$,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{s} \vec{u}}$$

l'accélération \vec{a} de la particule est ensuite définie par

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s} \vec{u} + \dot{s} \frac{d\vec{u}}{dt} = \ddot{s} \vec{u} + \dot{s} \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}}{ds}$$

et donc, avec (7),

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\ddot{s} \vec{u}}_{\text{accélération tangentielle}} + \underbrace{\frac{\dot{s}^2}{R} \vec{N}}_{\text{accélération normale}}} \quad (11)$$

5) Considérons un mouvement à $|\vec{v}|$ constante, ie avec (10) et \vec{u} unitaire,

$$|\vec{v}| = \dot{s} = \text{constante}$$

On doit donc avoir $\ddot{s} = 0$, et donc avec (11)

$$\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{N}$$

d' où

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$$

14

Ainsi, pour un mouvement à $|\vec{v}|$ constante, $|\vec{a}|$ mesure
l'accélération normale.

Exo 2: on rappelle qu'un champ de vecteurs $\vec{v}(P)$, où P est un point d'un espace affine euclidien E , est dit équiprojectif s'il satisfait

$$(1) \quad \vec{v}(P) \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{v}(Q) \cdot \overrightarrow{PQ} \quad \forall P, Q \in E$$

Soient donc deux champs équiprojectifs $\vec{v}_1(P)$ et $\vec{v}_2(P)$, avec P un point d'un espace affine euclidien à trois dimensions. On suppose qu'il existe trois points P_1, P_2 et P_3 non-alignés tels que

$$\vec{v}_1(P_j) = \vec{v}_2(P_j) \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Puisque \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont équiprojectifs, ils satisfont (1) et on a donc en particulier

$$(3) \quad \vec{v}_{1,2}(P_j) \cdot \overrightarrow{P_j Q} = \vec{v}_{1,2}(Q) \cdot \overrightarrow{P_j Q} \quad \forall Q, \forall j = 1, 2, 3$$

En combinant (2) et (3) on voit que

$$\vec{v}_1(P_j) \cdot \overrightarrow{P_j Q} \stackrel{(2)}{=} \vec{v}_2(P_j) \cdot \overrightarrow{P_j Q} \stackrel{(3)}{=} \vec{v}_1(Q) \cdot \overrightarrow{P_j Q} \quad \forall Q, \forall j = 1, 2, 3$$

et de plus

$$\vec{v}_2(P_j) \cdot \overrightarrow{P_j Q} = \vec{v}_2(Q) \cdot \overrightarrow{P_j Q} \quad \forall Q, \forall j = 1, 2, 3$$

d'où

$$\vec{v}_1(Q) \cdot \overrightarrow{P_j Q} = \vec{v}_2(Q) \cdot \overrightarrow{P_j Q} \quad \forall Q, \forall j = 1, 2, 3$$

et donc

$$(4) \quad (\vec{v}_1(Q) - \vec{v}_2(Q)) \cdot \overrightarrow{P_j Q} = 0 \quad \forall Q, \forall j = 1, 2, 3$$

On peut alors multiplier (4) par un scalaire α_j , $j = 1, 2, 3$, quelconque pour obtenir

$$(5) \quad [\vec{v}_1(Q) - \vec{v}_2(Q)] \cdot [\alpha_1 \vec{P}_1 Q + \alpha_2 \vec{P}_2 Q + \alpha_3 \vec{P}_3 Q] = 0, \quad \forall Q$$

qui est valide pour tous scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Supposons maintenant que Q n'appartient pas au plan formé par les trois points non alignés P_1, P_2, P_3 . Dans ce cas, les trois vecteurs $\vec{P}_1 Q, \vec{P}_2 Q$ et $\vec{P}_3 Q$ sont linéairement indépendants. Ainsi, $\{\vec{P}_1 Q, \vec{P}_2 Q, \vec{P}_3 Q\}$ forme une base de l'espace à trois dimensions considéré ici. La condition (5) est alors équivalente à

$$[\vec{v}_1(Q) - \vec{v}_2(Q)] \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall \vec{n}$$

et donc

$$\vec{v}_1(Q) = \vec{v}_2(Q)$$

pour tout point Q n'appartenant pas au plan formé par les trois points P_1, P_2, P_3 .

Dans le cas où Q appartient au plan formé par P_1, P_2, P_3 , la même logique peut être utilisée. Cette fois, il suffit de deux vecteurs linéairement indépendants, par exemple $\vec{P}_1 Q$ et $\vec{P}_2 Q$, pour former une base de ce plan (en supposant en plus que Q n'appartient pas à la droite formée par P_1 et P_2). Enfin, le cas où Q appartient à cette dernière droite requiert seulement un vecteur indépendant.

Dans tous les cas, on voit donc bien que l'on a la conclusion

$$\vec{v}_1(P_j) = \vec{v}_2(P_j), \quad j=1,2,3 \quad (\Rightarrow) \quad \vec{v}_1(Q) = \vec{v}_2(Q), \quad \forall Q$$

Exercice 4: soit un solide en mouvement et trois points A, B et C de ce solide qui, à l'instant t , ont coordonnées et vitesses cartésiennes

$$A: (0, 0, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v}(A) = (2, 1, -3)$$

$$B: (1, 1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v}(B) = (0, 3, -1)$$

$$C: (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v}(C) = (-1, 2, -1)$$

On sait que le champ des vitesses d'un solide satisfait

$$(1) \quad \vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \times \vec{QP}, \quad \forall P, Q \in \text{solide}$$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation instantané caractérisant le mouvement de rotation du solide à l'instant t . Ainsi, si l'on connaît la vitesse d'un point du solide et le vecteur rotation $\vec{\omega}$, on peut alors caractériser complètement la vitesse de tout point du solide.

Appliquons donc (1) aux trois points A, B, C afin de déterminer le vecteur rotation $\vec{\omega}$, que l'on notera

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

en notation colonne. De (1) on tire

$$\vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{v}(B) - \vec{v}(A) \quad (\Rightarrow) \quad \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} \omega_z = 2 \\ \omega_x - \omega_y = 2 \end{cases}$$

De plus, on a avec (1)

$$\vec{\omega} \times \vec{AC} = \vec{v}(C) - \vec{v}(A) \quad (\Rightarrow) \quad \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où on obtient, avec (2) i.e. $\omega_z = 2$,

$$\omega_x = -\omega_y = 1$$

Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est donc donné par

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Connaissant $\vec{\omega}$, on peut maintenant déterminer l'axe de rotation du solide à l'instant t , défini comme le lieu des points P de coordonnées x, y, z où $\vec{v}(P)$ est parallèle au vecteur rotation $\vec{\omega}$, i.e. tels que

$$\vec{v}(P) \times \vec{\omega} = \vec{0} \quad (4)$$

En écrivants, avec (1),

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \times \vec{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

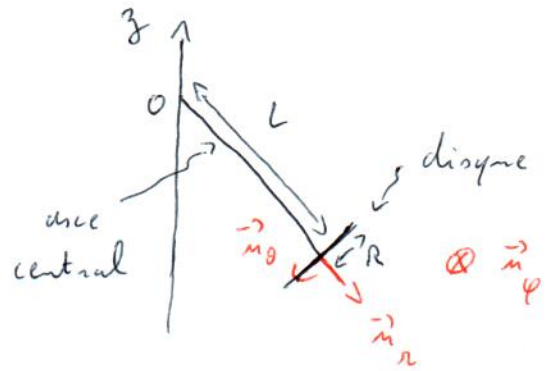
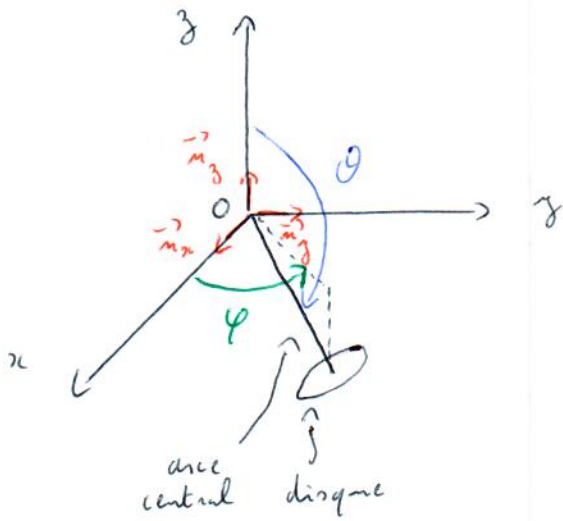
et en résolvant l'équation (4), on montre que l'axe de rotation est donné par l'ensemble des points P de coordonnées cartésiennes x, y, z satisfaisant

$$(5) \quad x = -y = \frac{z}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Notons que $x = y = z = 0$ satisfait (5) : ainsi, le point A se situe sur l'axe de rotation. Or, la vitesse de A n'importe quel point de l'axe de rotation caractérise la vitesse de translation du solide. Cette dernière est donc donnée par $\vec{v}(A)$.

Exo 5 : on considère un disque de rayon R , centre C

et épaisseur négligeable, pouvant tourner autour de son axe central. Cet axe central (en contact avec le disque au point C) est de longueur L et est lui-même attaché en un point O fixe. Ce point O est pris comme origine d'un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et d'un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On dénote $\mathcal{R} = (O, \vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ et $\mathcal{R}'' = (O, \vec{n}_r, \vec{n}_\theta, \vec{n}_\varphi)$ les référentiels cartésien et sphérique

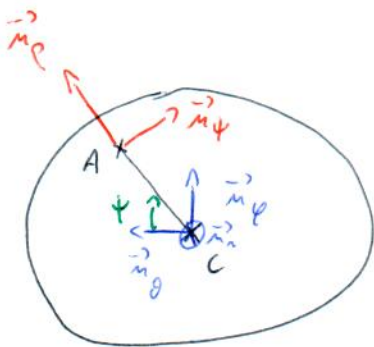


La position de l'axe central est repérée par les coordonnées sphériques (θ, φ) du centre C du disque. On repère ensuite un point A du disque par l'angle ψ donné par $\psi = (\vec{n}_\theta, \vec{CA})$. On introduit également les vecteurs

unitaires \vec{n}_ρ et \vec{n}_ψ définis par

$$\vec{n}_\rho = \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}$$

$$\vec{n}_\psi = \vec{n}_r \times \vec{n}_\rho$$



Ainsi, un point P de l'axe est repéré par

$$\vec{OP} = r \vec{m}_1, \quad \forall P \in \text{axe} \quad (1)$$

où r est la distance séparant P de O , $r \in [0, L]$.

De plus, un point Q du disque est repéré par

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{CQ}, \quad \forall Q \in \text{disque}$$

Puisque $\vec{OC} = L \vec{m}_1$ et $\vec{CQ} = \rho \vec{m}_2$, où ρ est la distance séparant le point Q de C sur le disque, $\rho \in [0, R]$, on a donc

$$\vec{OQ} = L \vec{m}_1 + \rho \vec{m}_2, \quad \forall Q \in \text{disque} \quad (2)$$

1) Un solide est caractérisé par le fait que la distance séparant deux quelconques de ses points reste constante au cours du temps, indépendamment du mouvement du solide. Considérons donc l'ensemble {axe + disque}. Il est clair que deux points quelconques de l'axe restent séparés d'une même distance, que l'axe et / ou le disque tournent ou non. De même pour deux points quelconques du disque. Considérons donc un point P quelconque de l'axe, ie avec $\vec{OP} = r \vec{m}_1$, et un point Q quelconque du disque, ie avec $\vec{OQ} = L \vec{m}_1 + \rho \vec{m}_2$.

On a donc

$$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = -r \vec{m}_1 + L \vec{m}_1 + \rho \vec{m}_2$$

d'où

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(L-r)^2 + \rho^2}$$

où L désigne la longueur de l'axe central (qui est

donc constante), r la distance séparant P et O (aussi constante) et ρ la distance entre C et Q (encore une constante). Ainsi,

52

$$|\vec{PQ}| = \text{constante} \quad \forall P \in \text{axe}, \quad \forall Q \in \text{disque}$$

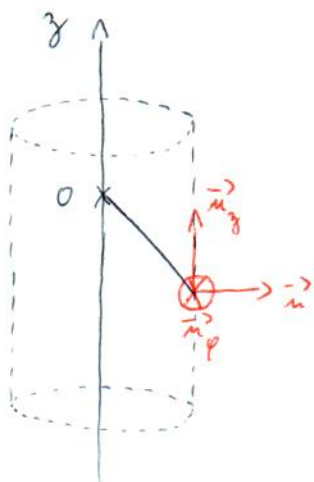
ce qui montre bien que la distance entre tout point de l'axe et tout point du disque ne change pas au cours du temps. L'ensemble {axe + disque} peut donc bien être considéré comme un solide \mathcal{S} unique. De plus, par construction le vecteur \vec{n}_n tourne avec l'axe central, et $\vec{n}_\varphi, \vec{n}_z$ tournent avec le disque. Le référentiel $\mathcal{R}_y = (O, \vec{n}_n, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_z)$ est donc par construction le référentiel suivant le mouvement du solide \mathcal{S} , et constitue donc le référentiel associé à ce solide.

2) En plus des référentiels $\mathcal{R} = (O, \vec{n}_n, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$, $\mathcal{R}'' = (O, \vec{n}_n, \vec{n}_\theta, \vec{n}_\varphi)$ et $\mathcal{R}_y = (O, \vec{n}_n, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_z)$ cartésien, sphérique et du solide, respectivement, on considère également le référentiel

$$\mathcal{R}' = (O, \vec{n}, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_z)$$

$$\vec{n} = \vec{n}_\varphi \times \vec{n}_z$$

a)



On voit donc que le vecteur \vec{n} est simplement le vecteur radial d'un système de coordonnées cylindriques, d'axe vertical z et avec \vec{n}_φ le vecteur orthoradial.

$\Rightarrow \mathcal{R}' = (O, \vec{n}, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_z)$ est donc un référentiel cylindrique

b) Changement de base $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$:

On souhaite donc exprimer les vecteurs de $\mathcal{R}' = (\vec{0}, \vec{n}'_x, \vec{n}'_y, \vec{n}'_z)$ en termes des vecteurs de $\mathcal{R} = (\vec{0}, \vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$. On remarque que \vec{n}'_z est un vecteur appartenant à la fois à \mathcal{R} et à \mathcal{R}' : on doit donc simplement exprimer les deux vecteurs cylindriques \vec{n} et \vec{n}'_φ en termes des deux vecteurs cartésiens \vec{n}_x et \vec{n}_y .



On voit donc que

$$\vec{n} = \cos \varphi \vec{n}_x + \sin \varphi \vec{n}_y \quad ; \quad \vec{n}'_\varphi = -\sin \varphi \vec{n}_x + \cos \varphi \vec{n}_y$$

d'où directement

$$\begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{n}'_\varphi \\ \vec{n}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_x \\ \vec{n}_y \\ \vec{n}_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

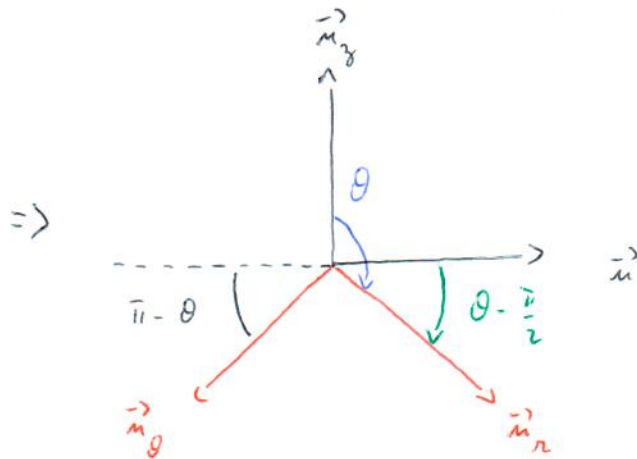
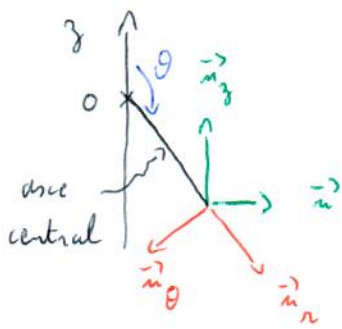
pour le changement de référentiel $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$. Ainsi, le référentiel \mathcal{R}' est en rotation par rapport à \mathcal{R} , d'un angle φ autour de \vec{n}'_z . Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est donc

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \vec{n}'_z \quad (4)$$

Changement de base $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}''$:

(53)

On exprime maintenant les vecteurs de $\mathcal{R}'' = (0, \vec{n}_n'', \vec{n}_\theta'', \vec{n}_\varphi'')$ en termes des vecteurs de $\mathcal{R}' = (0, \vec{n}', \vec{n}_\varphi', \vec{n}_z')$, i.e. les vecteurs \vec{n}_n'' et \vec{n}_θ'' en termes de \vec{n} et \vec{n}_z' . Représentons donc ces quatre vecteurs dans le plan contenant l'axe (Oz) ainsi que l'axe central du solide :



On a donc

$$\vec{n}_n'' = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \vec{n} - \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \vec{n}_z' ; \quad \vec{n}_\theta'' = -\cos(\pi - \theta) \vec{n} - \sin(\pi - \theta) \vec{n}_z'$$

d'où, avec $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

$$\vec{n}_n'' = \sin \theta \vec{n} + \cos \theta \vec{n}_z' ; \quad \vec{n}_\theta'' = \cos \theta \vec{n} - \sin \theta \vec{n}_z'$$

On obtient donc

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_n'' \\ \vec{n}_\theta'' \\ \vec{n}_\varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{n}_\varphi' \\ \vec{n}_z' \end{pmatrix} \quad (5)$$

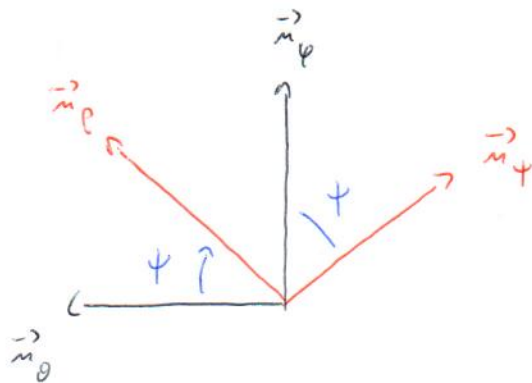
pour le changement de référentiel $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}''$. Le référentiel \mathcal{R}'' est donc en rotation par rapport à \mathcal{R}' , d'un angle θ autour de \vec{n}_φ' . Le vecteur rotation $\vec{n}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}$ est donc

$$\vec{n}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} = \dot{\theta} \vec{n}_\varphi$$

(6)

Changement de base $\mathcal{R}'' \rightarrow \mathcal{R}_y$:

On exprime enfin les vecteurs de $\mathcal{R}_y = (0, \vec{n}_r, \vec{n}_\rho, \vec{n}_\psi)$ en termes des vecteurs de $\mathcal{R}'' = (0, \vec{n}_r, \vec{n}_\theta, \vec{n}_\varphi)$. Représentons donc les vecteurs $\vec{n}_\theta, \vec{n}_\varphi$ et $\vec{n}_\rho, \vec{n}_\psi$ dans le plan du disque, ie perpendiculaire à \vec{n}_r :



On a donc

$$\vec{n}_\rho = \cos \psi \vec{n}_\theta + \sin \psi \vec{n}_\varphi ; \quad \vec{n}_\psi = -\sin \psi \vec{n}_\theta + \cos \psi \vec{n}_\varphi$$

d'où directement

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_r \\ \vec{n}_\rho \\ \vec{n}_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_r \\ \vec{n}_\theta \\ \vec{n}_\varphi \end{pmatrix} \quad (7)$$

pour le changement de référentiel $\mathcal{R}'' \rightarrow \mathcal{R}_y$. Ainsi, \mathcal{R}_y est en rotation par rapport à \mathcal{R}'' , d'un angle ψ autour de \vec{n}_r . Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_y/\mathcal{R}''}$ est donc

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_y/\mathcal{R}''} = \dot{\psi} \vec{n}_r \quad (8)$$

c) le vecteur $\vec{\Omega}$ décrivant la rotation du solide dans le référentiel cartésien \mathcal{R} est donc la somme

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_y/\mathcal{R}''} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

(54)

soit, avec (4), (6) et (8),

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{m}_z + \dot{\theta} \vec{m}_\varphi + \dot{\psi} \vec{m}_r \quad (9)$$

3) Soit un point P quelconque de l'axe central, situé à une distance $r \leq L$ de l'origine O. On a donc

$$\vec{OP} = r \vec{m}_r, \quad r \leq L \quad (10)$$

Or, on sait que le champ des vitesses des points du solide \mathcal{S} satisfait, dans le référentiel \mathcal{R} ,

$$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{AB}, \quad \forall A, B \in \mathcal{S}$$

où $\vec{\Omega}$ est précisément le vecteur rotation de \mathcal{R}_y par rapport à \mathcal{R} , donné par (9). On a donc en particulier pour $B=P$ et $A=O$

$$\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{OP}$$

d'où, avec (10) et puisque $\vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ (l'origine O étant par construction fixe),

$$\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} = r \left(\dot{\varphi} \vec{m}_z + \dot{\theta} \vec{m}_\varphi + \dot{\psi} \vec{m}_r \right) \times \vec{m}_r$$

soit, puisque par construction $\vec{m}_\varphi \times \vec{m}_r = \vec{m}_\theta$,

$$\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} = r \dot{\theta} \vec{m}_\theta + r \dot{\varphi} \vec{m}_z \times \vec{m}_r \quad (11)$$

Les vecteurs \vec{u}_n et \vec{u}_θ étant des vecteurs de base du système de coordonnées sphériques, ils s'expriment en termes des vecteurs cartésiens selon

$$(12) \begin{cases} \vec{u}_n = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \end{cases}$$

En combinant (11) et (12) on trouve donc

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(P)_{/R} &= r \left[\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \right] \vec{u}_x \\ &+ r \left[\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \right] \vec{u}_y - r \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_z \end{aligned}} \quad (13)$$

pour tout point P de l'axe central, ie tel que $\vec{OP} = r \vec{u}_n$ avec $r \leq L$.

4) Soit maintenant un point Q quelconque du disque, situé à une distance ρ du centre C du disque. On a donc

$$\vec{OQ} = L \vec{u}_n + \rho \vec{u}_\rho \quad (14)$$

On sait donc que la vitesse de Q dans le référentiel R est donnée par

$$\vec{v}(Q)_{/R} = \vec{\Omega} \times \vec{OQ}$$

soit, avec (9) et (14),

$$\vec{v}(Q)_{/R} = \left(\dot{\varphi} \vec{u}_z + \dot{\theta} \vec{u}_\varphi + \dot{\varphi} \vec{u}_n \right) \times \left(L \vec{u}_n + \rho \vec{u}_\rho \right) \quad (15)$$

Or, le terme $\vec{\Omega} \times L \vec{u}_n$ dans (15) représente simplement

la vitesse $\vec{v}(C)_{/R}$ du point C dans \mathcal{R} , qui est donc donnée par (13) pour $r = L$. On a donc pour (15) 55

$$(16) \quad \vec{v}(Q)_{/R} = \vec{v}(C)_{/R} + \rho \dot{\varphi} \vec{n}_z \times \vec{n}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\theta + \rho \dot{\psi} \vec{n}_z \times \vec{n}_\rho$$

On doit donc à présent calculer les trois produits vectoriels dans le membre de gauche de (16).

→ $\vec{n}_z \times \vec{n}_\rho$: on a déjà exprimé en (7) le vecteur \vec{n}_ρ en termes des vecteurs sphériques \vec{n}_θ et \vec{n}_φ , avec

$$\vec{n}_\rho = \cos \psi \vec{n}_\theta + \sin \psi \vec{n}_\varphi \quad (17)$$

De plus on sait qu'en termes des vecteurs cartésiens

$$\vec{n}_\varphi = -\sin \varphi \vec{n}_x + \cos \varphi \vec{n}_y \quad (18)$$

En combinant (17) avec (12) et (18) on obtient donc

$$\begin{aligned} \vec{n}_z \times \vec{n}_\rho &= -(\cos \psi \cos \theta \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi) \vec{n}_x \\ &+ (\cos \psi \cos \theta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi) \vec{n}_y \end{aligned} \quad (19)$$

→ $\vec{n}_\varphi \times \vec{n}_\rho$: avec (17) on voit directement que

$$\vec{n}_\varphi \times \vec{n}_\rho = -\cos \psi \vec{n}_x$$

et donc, avec (12),

$$\begin{aligned} \vec{n}_\varphi \times \vec{n}_\rho &= -\cos \psi \sin \theta \cos \varphi \vec{n}_x - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi \vec{n}_y \\ &- \cos \psi \cos \theta \vec{n}_z \end{aligned} \quad (20)$$

→ $\vec{n}_x \times \vec{n}_\rho$: avec (17) on voit que

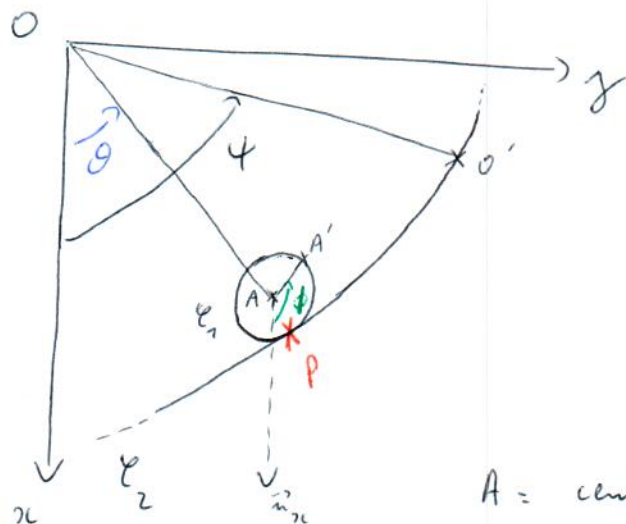
$$\vec{n}_x \times \vec{n}_\rho = \cos \psi \vec{n}_\varphi - \sin \psi \vec{n}_\theta$$

d'où, avec (12) et (18),

$$\begin{aligned} \vec{m}_n \times \vec{m}_p &= - \left(\sin \psi \cos \theta \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \right) \vec{m}_x \\ &- \left(\sin \psi \cos \theta \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \right) \vec{m}_y + \sin \psi \sin \theta \vec{m}_z \end{aligned} \quad (21)$$

On substitue maintenant les résultats (19), (20) et (21) dans l'expression (16) de $\vec{v}(Q)_{\mathcal{R}}$

Exo 6 : soit le repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe.



Soit un cylindre \mathcal{E}_1 de rayon b et d'axe (Az) . Il roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre \mathcal{E}_2 de rayon $a+b$ et d'axe (Oz) , pouvant lui-même tourner autour de son axe.

A = centre du cylindre \mathcal{E}_1 , repéré dans le plan (xy) par l'angle θ .

A' = point matériel quelconque de \mathcal{E}_1 , repéré dans le plan (xy) par l'angle φ .

O' = point matériel quelconque de \mathcal{E}_2 , repéré dans le plan (xy) par l'angle ψ .

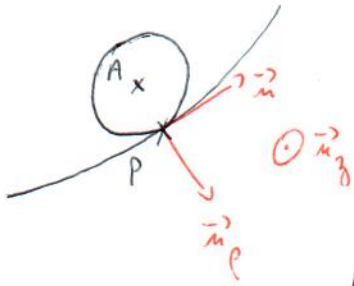
P = point de contact entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , où \mathcal{E}_1 roule sans glisser sur \mathcal{E}_2 .

Le point géométrique P peut être vu de deux manières différentes : soit comme un point du cylindre \mathcal{E}_1 , soit comme un point du cylindre \mathcal{E}_2 . La condition de roulement sans glissement exprime alors que les vitesses $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_1)$ du point P vu comme un point de \mathcal{E}_1 et $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2)$ du point P vu comme un point de \mathcal{E}_2 sont égales dans tout référentiel, i.e

$$(1) \quad \vec{v}(P \in \mathcal{E}_1) = \vec{v}(P \in \mathcal{E}_2), \quad \forall \text{ référentiel}$$

Considérons donc un système de coordonnées cylindriques d'origine O , et d'axe (Oz) , formé par les vecteurs radial \vec{m}_ρ , orthoradial \vec{m} et vertical \vec{m}_z . Dans ce référentiel, la vitesse $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2)$ est simplement donnée par

$$\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2) = (a+b) \dot{\varphi} \vec{m} \quad (2)$$



NB : ceci peut par exemple être obtenu de la loi de composition des vitesses dans le solide \mathcal{E}_2 en regardant l'origine O comme un point de \mathcal{E}_2 , i.e. $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2) = \vec{v}(O \in \mathcal{E}_2) + \vec{\Omega}_{\mathcal{E}_2} \times \vec{OP} = \vec{\Omega}_{\mathcal{E}_2} \times \vec{OP}$.

La vitesse $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2)$ s'obtient ensuite de la loi de composition des vitesses dans le solide \mathcal{E}_1 , et on a

$$\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2) = \vec{v}(A \in \mathcal{E}_1) + \vec{\Omega}_{\mathcal{E}_1} \times \vec{AP} \quad (3)$$

le point A étant repéré par l'angle θ , on a directement

$$\vec{v}(A \in \mathcal{E}_1) = a \dot{\theta} \vec{m} \quad (4)$$

De plus, le cylindre \mathcal{E}_2 tourne autour de son axe (Az) avec un angle φ . Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{E}_2}$ décrivant la rotation de \mathcal{E}_2 est donc

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{E}_2} = \dot{\varphi} \vec{m}_z \quad (5)$$

De plus, le vecteur \vec{AP} en coordonnées cylindriques est simplement donné par

$$\vec{AP} = b \vec{m}_\rho \quad (6)$$

En combinant (3) avec (4)-(6), et puisque $\vec{n}_3 \times \vec{n}_p = \vec{n}$ par construction, on voit donc que la vitesse $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_1)$ est donnée par

$$\vec{v}(P \in \mathcal{E}_1) = (a\dot{\theta} + b\dot{\varphi})\vec{n} \quad (7)$$

On substitue maintenant les expressions (2) et (7) de $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2)$ et $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_1)$ dans la condition de roulement sans glissement (1) pour obtenir

$$(8) \quad \boxed{a\dot{\theta} + b\dot{\varphi} = (a+b)\dot{\varphi}} \quad \text{Condition de roulement sans glissement}$$

L'accélération $\vec{a}(P \in \mathcal{E}_1)$ du point P se comme un point de \mathcal{E}_1 s'obtient ensuite à partir de la loi de composition des accélérations dans un solide. En effet, on sait alors que $\vec{a}(P \in \mathcal{E}_1)$ peut s'écrire comme

$$\vec{a}(P \in \mathcal{E}_1) = \vec{a}(A) + \overset{\circ}{\vec{\Omega}}_{\mathcal{E}_1} \times \vec{AP} + \vec{\Omega}_{\mathcal{E}_1} \times (\vec{\Omega}_{\mathcal{E}_1} \times \vec{AP}) \quad (9)$$

Puisque d'après (4) on a $\vec{v}(A) = a\dot{\theta}\vec{n}$, on a

$$\vec{a}(A) = \frac{d}{dt} \vec{v}(A) = a\ddot{\theta}\vec{n} + a\dot{\theta}\dot{\vec{n}} \quad (10)$$

Or, $\dot{\vec{n}} = -\dot{\theta}\vec{n}_p$, on a donc pour (10)

$$\vec{a}(A) = a\ddot{\theta}\vec{n} - a\dot{\theta}^2\vec{n}_p \quad (11)$$

De plus, \vec{n}_3 est fixe d'où, avec (5),

$$\overset{\circ}{\vec{\Omega}}_{\mathcal{E}_1} = \ddot{\varphi}\vec{n}_3 \quad (12)$$

En combinant (9) avec (5), (6), (11) et (12), on obtient donc

pour $\vec{a}(P \in \mathcal{E}_2)$

$$(13) \quad \vec{a}(P \in \mathcal{E}_2) = - (a\dot{\theta}^2 + b\dot{\varphi}^2) \vec{n}_P + (a\ddot{\theta} + b\ddot{\varphi}) \vec{n}$$

Toute la discussion ci-dessus reste valable que le cylindre \mathcal{E}_2 soit en mouvement ou non. Simplement, la différence entre le cas où \mathcal{E}_2 est fixe et le cas où \mathcal{E}_2 est en mouvement réside dans la condition de roulement sans glissement (8).

En effet, dans le cas particulier où \mathcal{E}_2 est fixe, ie où $\dot{\varphi} = 0$, la condition de roulement sans glissement (8) prend la forme simple

$$(14) \quad a\dot{\theta} + b\dot{\varphi} = 0 \quad (\mathcal{E}_2 \text{ fixe})$$

Dans ce cas, on voit donc directement sur (7) que la vitesse $\vec{v}(P \in \mathcal{E}_2)$ du point P appartenant à \mathcal{E}_2 est nulle,

$$(15) \quad \vec{v}(P \in \mathcal{E}_2) = \vec{0} \quad (\mathcal{E}_2 \text{ fixe})$$

De plus, puisque (14) implique directement que $a\ddot{\theta} + b\ddot{\varphi} = 0$, il est alors clair sur (13) que l'accélération $\vec{a}(P \in \mathcal{E}_2)$ du point P appartenant à \mathcal{E}_2 est donnée par

$$(16) \quad \vec{a}(P \in \mathcal{E}_2) = - (a\dot{\theta}^2 + b\dot{\varphi}^2) \vec{n}_P \quad (\mathcal{E}_2 \text{ fixe})$$

Ainsi, lorsque \mathcal{E}_2 est fixe, le point $P \in \mathcal{E}_2$ ne possède pas d'accélération orthoradiale. Notons enfin que la condition de roulement sans glissement (14) assure une relation de proportionnalité entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$. Ceci nous permet par exemple d'exprimer $\vec{a}(P \in \mathcal{E}_2)$ en fonction de $\dot{\varphi}$ uniquement, et on a

$$(17) \quad \vec{a}(P \in \mathcal{E}_2) = - b\dot{\varphi}^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \vec{n}_P \quad (\mathcal{E}_2 \text{ fixe})$$

Exo 7: un point O' ("cible") est mobile à vitesse (7)
constante V sur l'axe (Ox) d'un repère fixe (O, x, y) .

On a donc

$$\vec{OO'} = Vt \vec{u}_x \quad (1)$$

Un point P ("missile") est mobile dans le plan (xy) , de telle manière que sa vitesse par rapport au repère fixe soit toujours de norme $2V$ et dirigée vers le point O' . On dénote par x et y les coordonnées du point P dans le repère fixe $\mathcal{R} = (O, x, y)$, ie

$$\vec{OP} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y \quad (2)$$

On considère également le repère mobile $\mathcal{R}' = (O', x', y')$, d'origine O' et d'axes $(O'u')$ et $(O'y')$ parallèles aux axes (Ox) et (Oy) de \mathcal{R} . On a donc en particulier $\vec{u}_{x'} = \vec{u}_x$ et $\vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$. Soient x' et y' les coordonnées du point P dans \mathcal{R}' , ie

$$\vec{O'P} = x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} \quad (3)$$

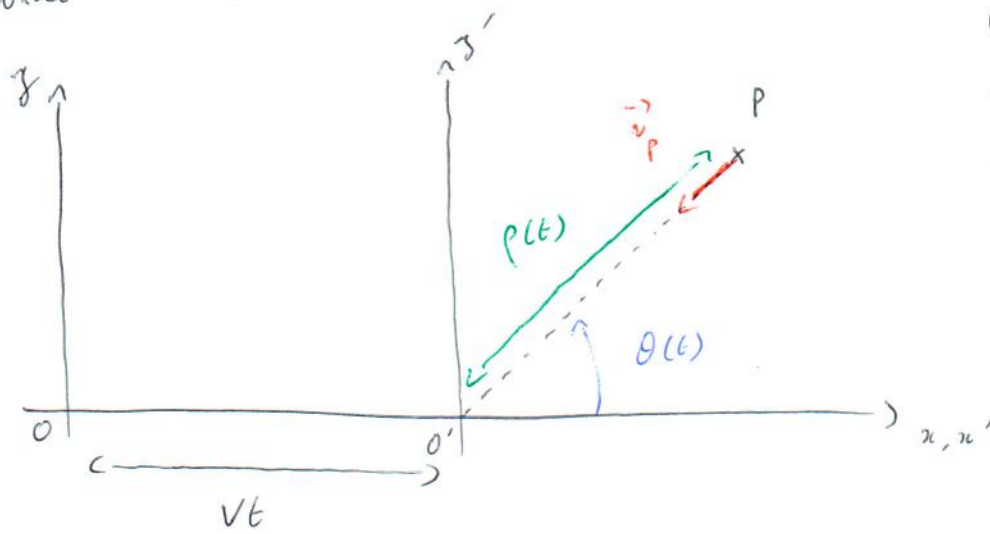
On a donc avec (1) - (3)

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OO'} + \vec{O'P} = Vt \vec{u}_x + x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} \\ &= x \vec{u}_x + y \vec{u}_y \end{aligned}$$

d'où on tire directement la relation entre les coordonnées x et y de P dans \mathcal{R} et les coordonnées x' et y' de P dans \mathcal{R}' , et on a

$$(4) \quad \begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \end{cases}$$

1) Introduisons maintenant un système de coordonnées polaires afin de repérer la position du point P dans le repère mobile \mathcal{R}' .



On écrit \vec{v}_P la vitesse du point P dans le repère fixe \mathcal{R} . On sait donc que $|\vec{v}_P| = v$

La distance séparant le point P de la cible O' à l'instant t est désignée $\rho(t)$, tandis que $\theta(t)$ désigne l'angle formé par le vecteur $\vec{O'P}$ avec l'axe (Ox) . On a donc $\vec{O'P}$ en fonction de $\rho(t)$ et $\theta(t)$, ie

$$\vec{O'P} = \rho \cos \theta \vec{u}_x + \rho \sin \theta \vec{u}_y \quad (5)$$

En comparant (3) et (5), on voit donc que les coordonnées cartésiennes x' et y' de P dans \mathcal{R}' sont reliées aux coordonnées polaires ρ et θ via

$$(6) \quad \begin{cases} x' = \rho \cos \theta \\ y' = \rho \sin \theta \end{cases}$$

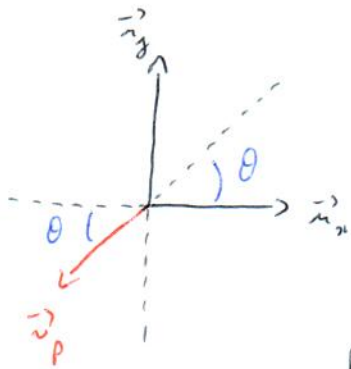
En combinant (4) et (6), on obtient donc la relation entre les coordonnées x, y de P dans \mathcal{R} et les coordonnées polaires, et on a

$$(7) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta + vt \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Enfin, exprimons la vitesse \vec{v}_P du point P dans le repère fixe \mathcal{R} en fonction des coordonnées polaires ρ et θ .

On sait que dans ce repère, on a $|\vec{v}_P| = 2V$.

(7₂)



On a donc

$$\vec{v}_P = -2V \cos \theta \vec{u}_x - 2V \sin \theta \vec{u}_y \quad (8)$$

De plus, \vec{v}_P est par définition donnée

par $\vec{v}_P = \frac{d\vec{OP}}{dt}$, soit avec (2)

$$\vec{v}_P = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y \quad (9)$$

En combinant (8) et (9) on voit donc directement que

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x} = -2V \cos \theta \\ \dot{y} = -2V \sin \theta \end{cases}$$

Dérivons donc (7) par rapport au temps, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta + v \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

soit avec (10)

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta + v = -2V \cos \theta & (11a) \\ \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta = -2V \sin \theta & (11b) \end{cases}$$

On multiplie maintenant (11a) par $\cos \theta$ et (11b) par $\sin \theta$, puis on additionne les deux équations résultantes pour obtenir

$$\dot{\rho} = -V(2 + \cos \theta)$$

On multiplie ensuite (11b) par $\cos \theta$ et (11a) par $\sin \theta$, puis on fait la différence pour obtenir

$$\dot{\theta} = \frac{V \sin \theta}{\rho}$$

Ainsi, le système (11) est équivalent au système d'équations différentielles complètes

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{\rho} = -V(\cos \theta + 2) \\ \dot{\theta} = \frac{V}{\rho} \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} (12a) \\ (12b) \end{matrix}$$

Les équations (12) nous donnent les évolutions temporelles des coordonnées polaires ρ et θ . On souhaite ici déterminer la variation de ρ en fonction de θ . Pour ce faire, on prend le rapport des deux équations (12a) et (12b), et on obtient

$$\frac{\dot{\rho}}{\dot{\theta}} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} = -\rho \frac{\cos \theta + 2}{\sin \theta}$$

c'est à dire, en séparant les variables ρ et θ ,

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{\cos \theta + 2}{\sin \theta} d\theta \quad (13)$$

Cette équation s'intègre et donne

$$\ln \rho = - \int d\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 2 \int \frac{d\theta}{\sin \theta}$$

$$= - \ln |\sin \theta| - 2 \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| + \ln c$$

où c est une constante d'intégration. Notons que l'angle

θ reste compris entre 0 et π , ce qui assure que $\sin \theta > 0$ et $\tan \frac{\theta}{2} > 0$. On peut donc écrire

$$\ln p = -\ln \sin \theta - \ln \tan^2 \frac{\theta}{2} + \ln c = \ln \left(\frac{c}{\sin \theta \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

(7)
3

et donc, en prenant l'exponentielle, et avec $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$$p(\theta) = c \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \quad (14)$$

On détermine maintenant la constante c avec les conditions initiales. On sait qu'à l'instant initiale $t=0$, on a

$$p(0) = p_0 = R \quad \text{et} \quad \theta(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

On doit donc avoir avec (14)

$$p(\theta_0) = p_0 = R = c \frac{\cos \theta_0/2}{2 \sin^3 \theta_0/2} = c \frac{\cos \pi/4}{2 \sin^3 \pi/4}$$

Puisque $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on voit directement que

$$c = R$$

On combine à présent (14) et (15) pour obtenir l'équation polaire $p(\theta)$ de la trajectoire du missile P dans le repère mobile \mathcal{R}' :

$$p(\theta) = R \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \quad (16)$$

2) Le résultat (16) nous donne la dépendance de p en fonction de l'angle θ . On peut donc substituer cette

expression de ρ dans l'équation (17b) décrivant l'évolution temporelle de θ . En utilisant à nouveau $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, on trouve donc

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{4V}{R} \sin^4 \frac{\theta}{2} \quad (17)$$

On sépare cette fois les variables θ et t pour avoir

$$\frac{d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{4V}{R} dt$$

que l'on intègre pour obtenir (les valeurs initiales de t et θ étant 0 et $\theta_0 = \pi/2$)

$$\frac{4V}{R} t = \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sin^4 \frac{\theta'}{2}} = 2 \int_{\pi/4}^{\theta/2} \frac{d\theta''}{\sin^4 \theta''}$$

$$= -2 \left[\cotan \theta'' + \frac{1}{3} \cotan^3 \theta'' \right]_{\pi/4}^{\theta/2}$$

d'où, avec $\cotan \frac{\pi}{4} = \frac{\cos \pi/4}{\sin \pi/4} = 1$,

$$\frac{4V}{R} t = -2 \cotan \frac{\theta}{2} - \frac{2}{3} \cotan^3 \frac{\theta}{2} + \frac{8}{3} \quad (18)$$

Soit maintenant T le temps mis par le missile pour atteindre la cible. Ceci se produit lorsque $\rho = 0$ et donc, avec (16), lorsque $\cos \theta/2 = 0$ et donc lorsque $\theta = \pi$. On remplace donc t par T et θ par π dans (18), on remarque que $\cotan \pi/2 = \frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2} = 0$, et on obtient finalement l'expression suivante pour T :

$$\boxed{T = \frac{2R}{3V}} \quad (19)$$

Exo 1 : Soit d'abord un solide constitué par un ensemble discret de points matériels P_i , $i = 1, \dots, N$, repérés par les vecteurs position \vec{r}_i . Le moment d'inertie I_Δ du solide par rapport à un axe Δ est donné par

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^N m_i d^2(\vec{r}_i, \Delta) \quad (1)$$

où m_i est la masse du point matériel P_i et $d(\vec{r}_i, \Delta)$ est la distance entre le point P_i et l'axe Δ .

⚠ $d(\vec{r}_i, \Delta)$ n'est donc pas la distance entre le point P_i et le centre de masse (CM) du solide.

Dans le cas d'un solide traité comme un ensemble continu de points matériels, le moment d'inertie I_Δ est alors donné par

$$I_\Delta = \int_V dV \mu(\vec{r}) d^2(\vec{r}, \Delta) \quad (2)$$

où \vec{r} désigne la position d'un point P quelconque du solide, V est le volume délimité par le solide, $\mu(\vec{r})$ est la masse volumique (à 3D, surfacique à 2D, linéique à 1D), ou densité, du solide au point \vec{r} , dV est l'élément de volume autour du point \vec{r} , et $d(\vec{r}, \Delta)$ désigne la distance entre le point \vec{r} et l'axe Δ considéré.

Supposons maintenant que l'axe Δ passe par le CG du solide, ie $G \in \Delta$, et considérons un deuxième axe Δ' parallèle à l'axe Δ . On peut alors relier le moment d'inertie $(MI) \bar{I}_{\Delta'}$ du solide par rapport à l'axe Δ' au $(MI) \bar{I}_{\Delta}$ par rapport au CG au moyen du théorème des axes parallèles, et on a

$$(3) \quad \bar{I}_{\Delta'} = \bar{I}_{\Delta} + m d^2(\Delta, \Delta'), \quad G \in \Delta$$

où m est la masse totale du solide et $d(\Delta, \Delta')$ désigne la distance séparant les deux axes Δ et Δ' , celle-ci étant bien définie puisque les deux axes Δ et Δ' sont parallèles.

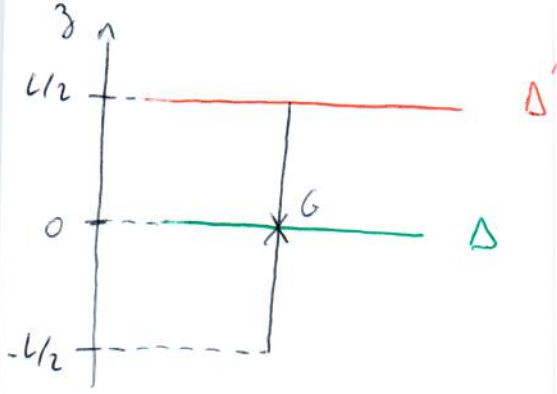
Dans la suite de cet exercice tous les solides considérés sont supposés être homogènes, et de masse m .

i) On considère tout d'abord une tige de longueur L , dont la densité (masse linéique dans ce cas) μ est donc donnée par

$$\mu = \frac{m}{L}$$

On souhaite calculer les $(MI) \bar{I}_{\Delta}$ et $\bar{I}_{\Delta'}$ de la tige par rapport aux axes

- 1) Δ , perpendiculaire à la tige et passant par le CG de la tige ;
- 2) Δ' , parallèle à Δ et passant par une extrémité de la tige.



Un point P quelconque de la tige est repéré par le vecteur \vec{r} donné par

(1)

$$\vec{r} = z \vec{u}_z, \quad z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$$

La distance entre un point P quelconque de la tige et l'axe Δ est ici simplement donnée par

$$d(\vec{r}, \Delta) = z$$

Le moment d'inertie \bar{I}_Δ est donc donné par (2) et on a

$$\bar{I}_\Delta = \int_{-L/2}^{L/2} dz \mu z^2 = \frac{m}{L} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2}$$

soit

$$\boxed{\bar{I}_\Delta = \frac{mL^2}{12}, \quad \Delta \perp \text{ tige et } G \in \Delta} \quad (4)$$

De plus, puisque $G \in \Delta$ et $\Delta' \parallel \Delta$, on sait que le $\Pi \bar{I}_{\Delta'}$ est relié à \bar{I}_Δ via (3). Or on a

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{L}{2}$$

On obtient donc, avec (4),

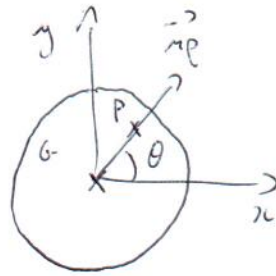
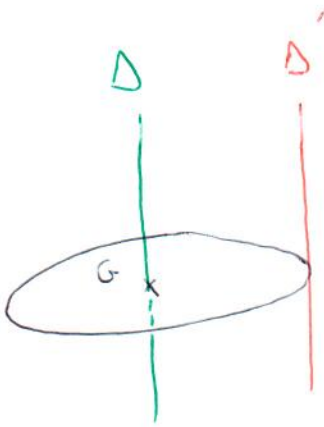
$$\boxed{\bar{I}_{\Delta'} = \frac{mL^2}{3}}$$

ii) On considère maintenant un disque de rayon R , donc de densité (masse surfacique ici)

$$\mu = \frac{m}{\pi R^2}$$

On veut les I_{Δ} , \bar{I}_{Δ} et $\bar{I}_{\Delta'}$ du disque par rapport aux axes

- 1) Δ , perpendiculaire au plan du disque et passant par le CG du disque ;
- 2) Δ' , parallèle à Δ et passant par un point du bord du disque.



Un point P quelconque du disque est repéré par le vecteur \vec{r}

donné par

$$\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho, \quad \rho \in [0, R]$$

La distance entre un point P quelconque du disque et l'axe Δ est ici

$$d(\vec{r}, \Delta) = \rho$$

Ainsi, le moment d'inertie \bar{I}_{Δ} est donné par

$$\bar{I}_{\Delta} = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \mu \rho^3 = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R$$

soit

$$\boxed{\bar{I}_{\Delta} = \frac{mR^2}{2}, \quad \Delta \perp \text{ disque et } G \in \Delta} \quad (5)$$

ii) encore, puisque $G \in \Delta$ et $\Delta' \parallel \Delta$, on utilise (3) pour calculer le $\overline{D\vec{I}}_{\Delta'}$. Notant que

$$d(\Delta, \Delta') = R$$

on obtient, avec (5),

$$\overline{I}_{\Delta'} = \frac{3mR^2}{2}$$

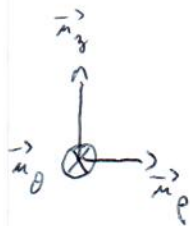
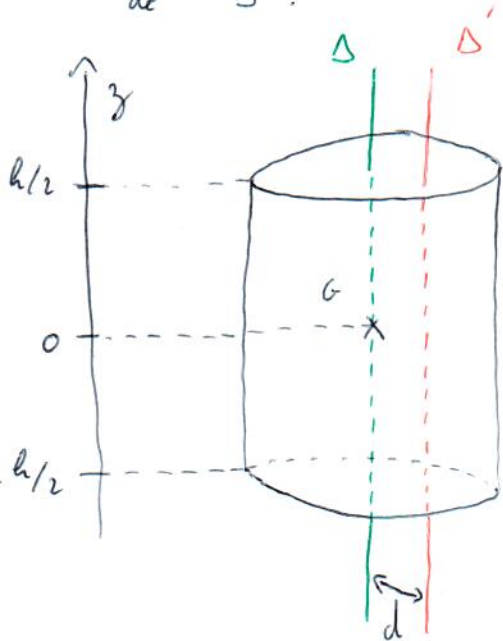
(13)

iii) On considère un cylindre de hauteur h et rayon R , donc de densité (masse volumique)

$$\mu = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

On veut les $\overline{D\vec{I}}_{\Delta}$ et $\overline{I}_{\Delta'}$ du cylindre par rapport aux axes

- 1) Δ , qui est simplement l'axe du cylindre et qui passe donc par le CG du cylindre;
- 2) Δ' , parallèle à Δ et situé à une distance d de Δ .



Un point P quelconque du cylindre est repéré, en coordonnées cylindriques, par le vecteur \vec{r} donné par

$$\vec{r} = \rho \vec{n}_\rho + z \vec{n}_z, \quad \begin{cases} \rho \in [0, R] \\ z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \end{cases}$$

L'élément de volume est alors

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

De plus, la distance entre un point P quelconque du cylindre et l'axe Δ est simplement

$$d(\vec{r}, \Delta) = \rho$$

Ainsi, le moment d'inertie \bar{I}_Δ est donné par

$$\bar{I}_\Delta = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R \rho \int_0^{2\pi} d\theta \mu \rho^3 = \frac{m}{\pi R^2 h} h 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R$$

soit

$$\boxed{\bar{I}_\Delta = \frac{mR^2}{2}, \quad \Delta \text{ l'axe du cylindre et } G \in \Delta} \quad (6)$$

Puisque $G \in \Delta$ et $\Delta' \parallel \Delta$, on utilise encore (3) pour calculer le $\text{D.I. } \bar{I}_{\Delta'}$. On a ici

$$d(\Delta, \Delta') = d$$

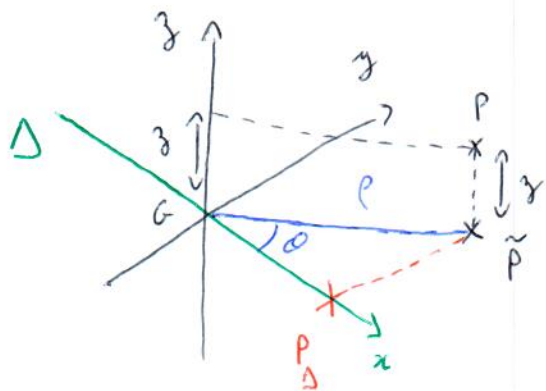
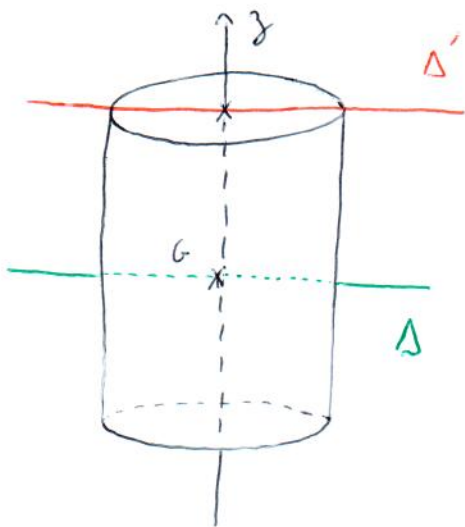
d'où, avec (6),

$$\boxed{\bar{I}_{\Delta'} = \frac{m}{2} (R^2 + 2d^2)}$$

iv) On considère toujours le même cylindre, mais on veut cette fois les $\text{D.I. } \bar{I}_\Delta$ et $\bar{I}_{\Delta'}$ par rapport aux axes

1) Δ , perpendiculaire à l'axe du cylindre et passant par le $\text{C.D. } G$ du cylindre ;

2) Δ' , parallèle à Δ mais passant par le centre d'un disque (le disque supérieur par exemple) limitant le cylindre.



La seule différence avec le cas (ii) (1/3) concerne la distance $d(\vec{a}, \Delta)$ entre un point P quelconque du cylindre et l'axe Δ , ainsi que la distance $d(\Delta, \Delta')$ entre les deux axes Δ et Δ' .

Soit donc P un point quelconque du cylindre. Soit \tilde{P} la projection de P dans le plan (Oxy) , et P_Δ la projection de P sur l'axe Δ (ie l'axe des x sur le schéma). On sait déjà que la distance $P\tilde{P}$ est simplement

$$P\tilde{P} = z$$

La distance $\tilde{P}P_\Delta$ s'obtient ensuite au moyen des coordonnées polaires et on a

$$\tilde{P}P_\Delta = \rho \sin \theta$$

La distance PP_Δ peut ensuite être calculée avec le théorème de Pythagore dans le triangle $P\tilde{P}P_\Delta$ rectangle en \tilde{P} , et

$$PP_\Delta^2 = P\tilde{P}^2 + \tilde{P}P_\Delta^2 = z^2 + \rho^2 \sin^2 \theta$$

Or, PP_Δ est par construction la distance entre le point P et l'axe Δ . En utilisant $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$, on a donc ici

$$d^2(\vec{a}, \Delta) = z^2 + \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \cos 2\theta)$$

Ainsi, le \overline{I}_{Δ} est donné par

$$\begin{aligned} \overline{I}_{\Delta} &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \mu \rho \left[z^2 + \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \cos 2\theta) \right] \\ &= \frac{m}{4\pi R^2 h} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R 2\pi \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{m}{4\pi R^2 h} h \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

soit

$$(7) \quad \overline{I}_{\Delta} = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad \Delta \perp \text{l'axe du cylindre et } G \in \Delta$$

De plus, puisqu'ici encore $G \in \Delta$ et $\Delta' \parallel \Delta$, on utilise (3) pour calculer le $\overline{I}_{\Delta'}$. Notant qu'ici

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{h}{2}$$

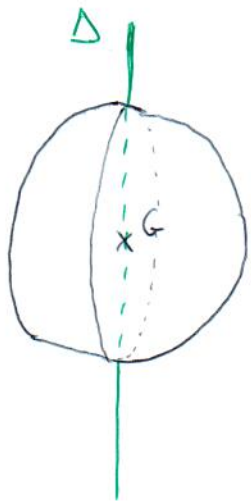
on a donc, avec (7),

$$\overline{I}_{\Delta'} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{3}$$

v) On considère maintenant une sphère pleine de rayon R , donc de densité

$$\mu = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

On veut le \overline{I}_{Δ} de la sphère par rapport à un axe Δ passant par le CG de la sphère.



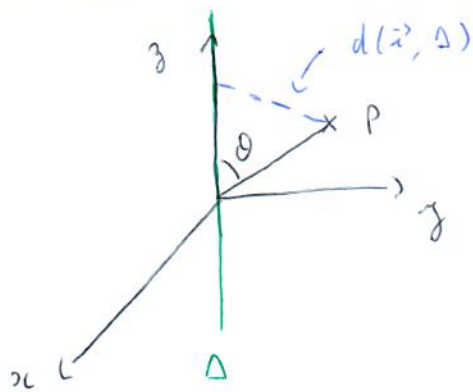
Un point P quelconque de la sphère est repéré, en coordonnées sphériques, par le vecteur \vec{r} donné par

$$\vec{r} = r \vec{u}_r, \quad r \in]0, R[$$

L'élément de volume est alors

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

On doit maintenant trouver la distance $d(\vec{r}, \Delta)$ entre un point P quelconque de la sphère et l'axe Δ . Pour ce faire, le choix le plus simple est d'orienter l'axe cartésien (Oz) selon Δ .



Dans ce cas, on a effectivement simplement

$$d(\vec{r}, \Delta) = r \sin \theta$$

Le n^{e} \bar{I}_Δ est alors donné par

$$\begin{aligned} \bar{I}_\Delta &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \mu r^4 \sin^3 \theta \\ &= \frac{3\mu}{4\pi R^3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \end{aligned}$$

On obtient en linéarisant $\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta)$, d'où

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = -\frac{3}{4} \left[\cos \theta \right]_0^\pi + \frac{1}{12} \left[\cos 3\theta \right]_0^\pi$$

soit

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{4}{3} \quad (8)$$

d'où pour \bar{I}_Δ

$$\boxed{\bar{I}_\Delta = \frac{2mR^2}{5}, \quad G \in \Delta} \quad (9)$$

Vi) On considère enfin une hémisphère pleine de rayon R , donc de densité

$$\mu = \frac{3m}{2\pi R^3}$$

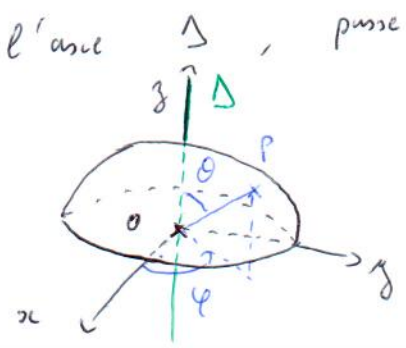
On veut les moments d'inertie \bar{I}_Δ et $\bar{I}_{\Delta'}$ de l'hémisphère par rapport aux axes

1) Δ , perpendiculaire au disque formant le bord de l'hémisphère et passant par le CG G de l'hémisphère ;

2) Δ' , perpendiculaire à Δ , ie contenu dans le plan du disque, et passant par le centre O de ce disque.

Commençons par calculer le \bar{I}_Δ . Comme avant, on travaille en coordonnées sphériques, et on se fixe Δ comme étant l'axe cartésien (Oz) .

NB: le système de coordonnées sphériques a ici pour origine le centre O du disque, qui n'est pas le CG de l'hémisphère. Néanmoins, l'axe (Oz) , ie l'axe Δ , passe également par le CG G .



Ici encore, un point P quelconque de l'hémisphère est repéré par

$$\vec{r} = r \vec{u}_r, \quad r \in [0, R]$$

et l'élément de volume est

$$dV = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

16

De plus, comme pour la question v) ci-dessus, la distance entre un point P quelconque de l'hémisphère est donnée par

$$d(\vec{r}, \Delta) = r \sin \theta$$

⚠ par contre, par rapport à la question v), l'angle θ des coordonnées sphériques varie seulement de 0 à $\pi/2$ ici !

Le moment d'inertie \bar{I}_Δ est alors donné par

$$\bar{I}_\Delta = \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \mu \, r^4 \sin^3 \theta$$

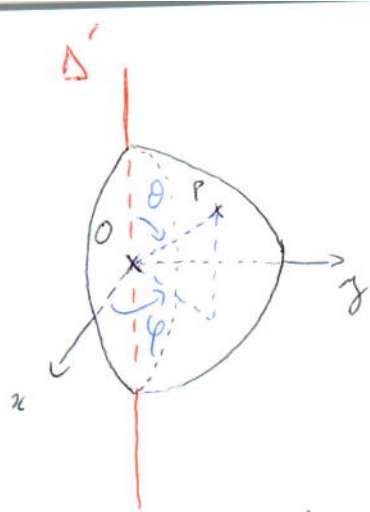
avec ici

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3 \theta = -\frac{3}{4} [\cos \theta]_0^{\pi/2} + \frac{1}{12} [\cos 3\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

On obtient donc pour \bar{I}_Δ

$$(10) \quad \boxed{\bar{I}_\Delta = \frac{2mR^2}{5}, \quad \Delta \perp \text{ disque et } G \in \Delta}$$

Calculons maintenant le $R\bar{I}_{\Delta'}$. Puisque les axes Δ et Δ' ne sont pas parallèles, on doit calculer $\bar{I}_{\Delta'}$ de sa définition (2). Comme avant, on se propose de travailler en coordonnées sphériques avec l'axe Δ' correspondant à l'axe cartésien (Oz) . Ceci nous permet de réutiliser l'expression précédemment déterminée pour $d(\vec{r}, \Delta)$.



Comme avant, la position d'un point P quelconque de l'hémisphère est repérée par

$$\vec{r} = r \vec{u}_r, \quad r \in [0, R]$$

l'élément de volume est

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

et la distance entre un point P quelconque de l'hémisphère et l'axe Δ' est

$$d(\vec{r}, \Delta') = r \sin \theta$$

⚠ par contre, par rapport au calcul de \bar{I}_Δ pour Δ perpendiculaire au disque et passant par le CG de l'hémisphère, ici l'angle θ varie entre 0 et π , tandis que l'angle φ varie également de 0 à π !
Le moment d'inertie $\bar{I}_{\Delta'}$ est alors donné par

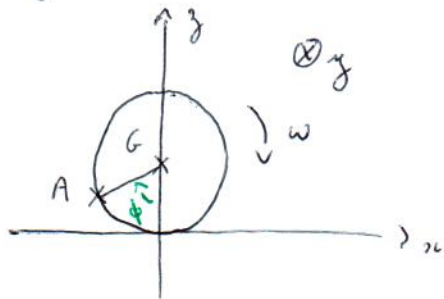
$$\bar{I}_{\Delta'} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi \mu r^4 \sin^3 \theta$$

d'où, en réutilisant l'expression (8) de $\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta$,

$$\bar{I}_{\Delta'} = \frac{2mR^2}{5} = \bar{I}_\Delta, \quad \Delta' \text{ dans le plan du disque}$$

Remarque : on pourrait bien entendu refaire le calcul par exemple avec l'axe cartésien (Oz) passant toujours par O et le CG, et avec l'axe Δ' correspondant eg à l'axe cartésien (Ox) . Dans ce cas la distance $d(\vec{r}, \Delta')$ est (un peu) plus compliquée, mais le résultat est évidemment le même. De même si on prend Δ' selon (Oy) .

Exo 2: soit un cylindre plein homogène de masse m , rayon R et hauteur h qui roule sur un plan (Ox, Oy) sans glisser. Soit G le centre de masse (CM) du cylindre. On considère l'axe (Oy) comme étant l'axe principal du cylindre.



On repère un point A du cylindre (différent de G) par l'angle ϕ entre $(G, -\vec{n}_z)$ et le vecteur \vec{GA} .

Le cylindre tourne autour de son axe principal (Oy) avec une vitesse angulaire

et le vecteur rotation $\vec{\omega}$ décrivant la rotation du cylindre est donc donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{n}_y \quad (1)$$

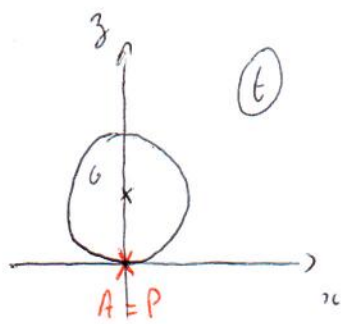
L'impulsion \vec{P} du cylindre est

$$\vec{P} = m \vec{v}_G \quad (2)$$

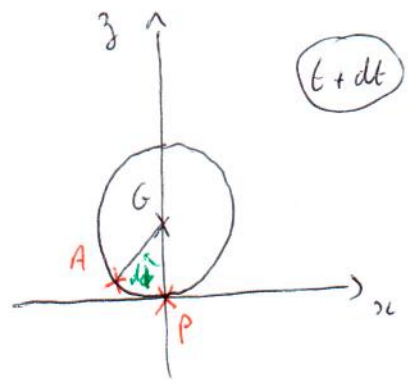
où \vec{v}_G est la vitesse du CM G . Dans notre choix d'axes, le CM G ne se déplace pas dans la direction y (correspondant à l'axe de rotation du cylindre), ni dans la direction z (puisque G se trouve toujours à la distance R du plan (xy) sur lequel il roule). Ainsi, G se déplace uniquement dans la direction x , et on a

$$\vec{v}_G = \frac{dx_G}{dt} \vec{n}_x \quad (3)$$

où dx_G correspond à la distance parcourue par G pendant l'intervalle de temps dt .



→



Lorsque dt est suffisamment petit, la distance dx_G parcourue par le CD G correspond à la distance $R d\phi$ parcourue par le point A du cylindre qui était en contact avec le plan (xy) à l'instant t . On a donc

$$dx_G = R d\phi$$

d'où directement

$$v_G = \frac{dx_G}{dt} = R \dot{\phi} \quad (4)$$

En combinant (2) avec (3) et (4), on obtient donc l'impulsion du cylindre

$$\vec{P} = m R \dot{\phi} \vec{u}_x \quad (5)$$

Le moment cinétique propre \vec{l}_G du cylindre par rapport au CD G est ensuite donné par (en projetant sur l'axe de rotation \vec{u}_y)

$$\vec{u}_y \cdot \vec{l}_G = \bar{I}_{(Gy)} \vec{\omega} = \bar{I}_{(Gy)} \dot{\phi} \vec{u}_y \quad (6)$$

où le moment d'inertie $\bar{I}_{(Gy)}$ du cylindre par rapport à son axe principal (Gy) est calculé à l'essai de cette série, et on a

$$\bar{I}_{(Gy)} = \frac{m R^2}{2} \quad (7)$$

En combinant (6) avec (1) et (7) on obtient donc

(8)

$$\vec{L}_G \cdot \vec{u}_G = \frac{mR^2}{2} \dot{\phi}$$

(22)

Enfin, l'énergie cinétique E du cylindre est donnée par la somme

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{\text{énergie cinétique du CG du cylindre}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{(G)} \omega^2}_{\text{énergie cinétique de rotation du cylindre autour de son CG}}$$

énergie cinétique
du CG G du
cylindre

énergie cinétique de
rotation du cylindre
autour de son CG

soit, avec (4), (7) et $\omega = \dot{\phi}$,

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{mR^2}{4} \dot{\phi}^2$$

et donc

$$E = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\phi}^2$$

(9)

Exo 3 : on considère le dispositif de l'exo 6 de la série IV de cinématique. Le cylindre \mathcal{C}_1 est plein, homogène et de masse m . On rappelle que A et O sont les centres de masse (CM) des cylindres \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On voit en que, dans le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}, \vec{u}_z)$ d'origine O , la vitesse \vec{v}_A du point A est donnée par

$$\vec{v}_A = a \dot{\theta} \vec{u} \quad (1)$$

L'impulsion \vec{P} de \mathcal{C}_1 est donc donnée par

$$\vec{P} = m \vec{v}_A = m a \dot{\theta} \vec{u} \quad (2)$$

Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ décrivant le mouvement de rotation de \mathcal{C}_1 est donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{u}_z \quad (3)$$

Le moment cinétique \vec{L}_A de \mathcal{C}_1 en A est donc donné par (en projetant sur l'axe de rotation \vec{u}_z)

$$\vec{u}_z \cdot \vec{L}_A = \bar{I}_{(A_3)} \vec{\omega} \cdot \vec{u}_z \quad (4)$$

où le moment d'inertie $\bar{I}_{(A_3)}$ de \mathcal{C}_1 par rapport à son axe principal (A_3) est calculé à l'exo 1 de cette série, et on a

$$\bar{I}_{(A_3)} = \frac{m l^2}{2} \quad (5)$$

En combinant (4) et (3) et (5), on obtient donc

$$\vec{u}_z \cdot \vec{L}_A = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi} \vec{u}_z \quad (6)$$

le moment cinétique \vec{L}_O de \mathcal{L}_1 en O est ensuite relié à \vec{L}_A via (toujours pour la projection selon \vec{u}_3)

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{L}_O = \left(\vec{L}_A + m \vec{v}_A \times \vec{AO} \right) \cdot \vec{u}_3$$

d'où, avec (1), (6) et $\vec{AO} = -a \vec{u}_\rho$,

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{L}_O = \left(\frac{m b^2}{2} \dot{\varphi} \vec{u}_3 - m a \dot{\theta} \vec{u} \times a \vec{u}_\rho \right) \cdot \vec{u}_3 = \left(\frac{m b^2}{2} \dot{\varphi} \vec{u}_3 + m a^2 \dot{\theta} \vec{u}_\rho \times \vec{u} \right) \cdot \vec{u}_3$$

et donc

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{L}_O = m \left(\frac{b^2}{2} \dot{\varphi} + a^2 \dot{\theta} \right) \quad (7)$$

Enfin, l'énergie cinétique de \mathcal{L}_1 est donnée par

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 + \frac{1}{2} \underline{\underline{I(A_3)}} \omega^2$$

énergie cinétique
du CO de \mathcal{L}_1

énergie cinétique de rotation
de \mathcal{L}_1 autour de son CO

soit, avec (1), (7) et (5)

$$E = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m b^2}{4} \dot{\varphi}^2$$

et donc

$$E = \frac{m}{2} \left(a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{b^2}{2} \dot{\varphi}^2 \right) \quad (8)$$

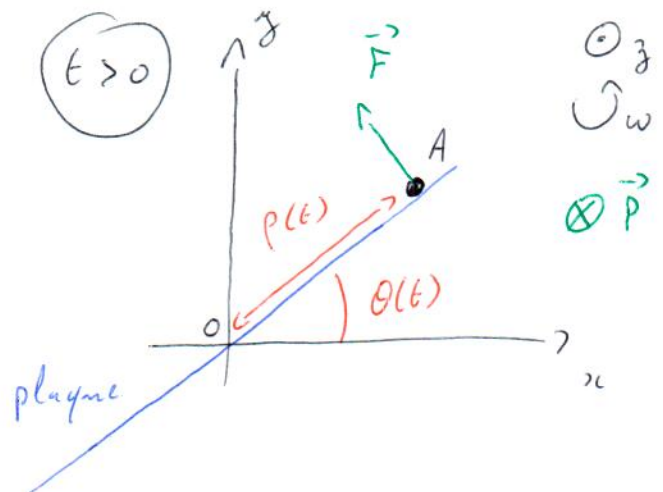
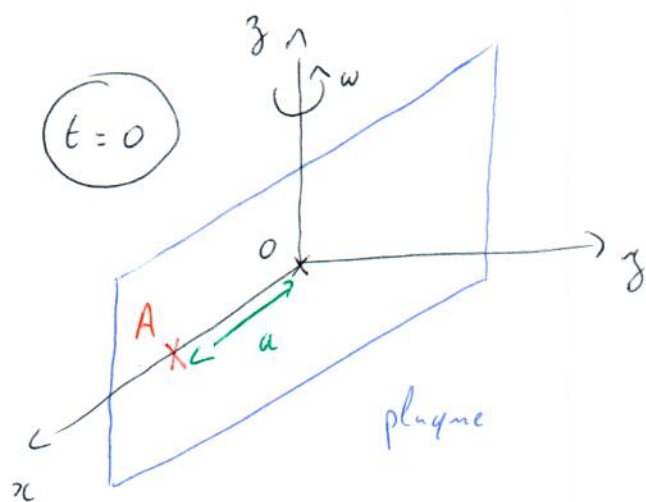
Exo 1: soit une plaque tournant autour de l'axe (Oz) vertical à une vitesse angulaire $\omega > 0$ constante. Un point matériel A de masse m est attaché à la plaque, à la distance a de l'axe de rotation (Oz) . On détache ensuite la masse à l'instant initial $t=0$, puis on étudie sa dynamique pour $t > 0$. On néglige tout frottement entre la masse et la plaque (ainsi qu'entre la masse et l'air).

Soit le référentiel inertiel $\mathcal{R} = (O, \vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ cartésien, par rapport auquel la plaque est en rotation. Dans ce référentiel, la position $\vec{r}_i(t)$ du point matériel A à l'instant $t \geq 0$ est donnée par

$$\vec{r}_i(t) = x(t) \vec{n}_x + y(t) \vec{n}_y + z(t) \vec{n}_z \quad (1)$$

On prend comme conditions initiales

$$x(0) = a \quad \text{et} \quad y(0) = z(0) = 0 \quad (2)$$



1) le point matériel A doit être sur le côté intérieur

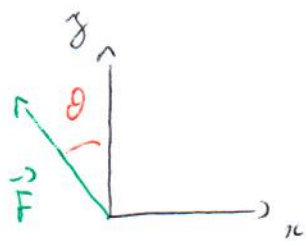
de la plaque en rotation. En d'autres termes, la plaque doit à tout instant aller à l'encontre du point matériel A.

2) le point matériel A subit deux forces :

i) son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$

ii) la force de réaction \vec{F} due au contact avec la plaque, et normale à la plaque.

Etant normale à la plaque, la force \vec{F} a seulement des composantes selon \vec{u}_x et \vec{u}_y .
En introduisant l'angle θ entre la plaque et l'axe (Ox), on voit donc que \vec{F}



s'écrit sous la forme

$$\vec{F} = -F \sin \theta \vec{u}_x + F \cos \theta \vec{u}_y \quad (3)$$

le principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le repère inertiel \mathcal{R} s'écrit donc

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{P} + \vec{F}$$

soit avec (1) et (3)

$$\ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z = -\frac{F}{m} \sin \theta \vec{u}_x + \frac{F}{m} \cos \theta \vec{u}_y - g \vec{u}_z \quad (4)$$

En plus des conditions initiales (CI) (2) pour la position du point matériel A à $t=0$, on a également la CI pour la vitesse selon z

$$\dot{z}(0) = 0 \quad (5)$$

Puisque le point matériel A est lâché sans vitesse initiale.

12

Notons tout d'abord qu'il est facile de résoudre le PFD (4) dans la direction z . Puisque y est constant, on intègre directement et on obtient, avec les CI (2) et (3)

$$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2} g t^2} \quad (6)$$

Déterminons maintenant le mouvement de la particule A dans le plan (x, y) .

⚠ l'amplitude F de la réaction normale de la plaque dépend à priori du temps. On ne peut donc pas directement intégrer le PFD (4) dans les directions x et y !

Notons tout d'abord que la plaque tourne à une vitesse angulaire ω constante. Or, ω désigne, par construction, la variation de l'angle θ au cours du temps, i.e.

$$\omega = \dot{\theta} = \text{constante}$$

d'où

$$\theta(t) = \omega t + \theta(0)$$

Puisqu'avec les CI (2) on a $y(0) = 0$ et donc $\theta(0) = 0$, on voit donc directement que la dépendance temporelle de l'angle θ est simplement

$$\boxed{\theta(t) = \omega t} \quad (7)$$

Ainsi, avec (6) et (7), on connaît déjà $z(t)$ et $\theta(t)$.

Il nous reste donc à déterminer $\rho(t)$ pour complètement déterminer le mouvement de A au cours du temps.

Pour ce faire, commençons par exprimer les coordonnées cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$ de A en fonction de $\rho(t)$ et $\theta(t)$. On a par construction

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \quad \text{et} \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \quad (8)$$

On dérive ensuite (8) deux fois par rapport au temps et on obtient, puisque avec $\dot{\theta} = \text{constante}$ on a $\ddot{\theta} = 0$,

$$\ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \theta - 2 \dot{\rho} \dot{\theta} \sin \theta - \rho \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (9)$$

et

$$\ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \theta + 2 \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta - \rho \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (10)$$

Multiplions maintenant (9) par $\cos \theta$ et (10) par $\sin \theta$, et prenons la somme pour obtenir

$$\cos \theta \ddot{x} + \sin \theta \ddot{y} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \quad (11)$$

Or, le PFD (4) nous assure que

$$\ddot{x} = -\frac{F}{m} \sin \theta \quad \text{et} \quad \ddot{y} = \frac{F}{m} \cos \theta \quad (12)$$

En combinant (11) et (12), et en se rappelant que $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$, on voit donc que ρ satisfait l'équation différentielle du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants,

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0 \quad (13)$$

Cette équation se résout facilement (voir la série II), et la solution générale est ici

$$p(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t} \quad (14)$$

Les coefficients α et β se déterminent au moyen des $c\bar{i}$, qui sont ici

i) $p(0) = a$, car A est à une distance a de l'axe de rotation à $t = 0$;

ii) $\dot{p}(0) = 0$, car dans le référentiel tournant avec la plaque A est lâché sans vitesse initiale.

On voit alors directement avec (14) que

$$\alpha = \beta = \frac{a}{2}$$

et $p(t)$ est donc donné par

$$p(t) = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \operatorname{ch} \omega t \quad (15)$$

Ainsi, en combinant les résultats (6), (7) et (15), et en se rappelant la relation (8), on voit que la position du point matériel A à tout instant $t \geq 0$ est donnée, dans le référentiel inertiel \mathcal{R} , par les coordonnées cartésiennes

$$(16) \begin{cases} x(t) = a \operatorname{ch}(\omega t) \cos(\omega t) \\ y(t) = a \operatorname{ch}(\omega t) \sin(\omega t) \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Enfin, vérifions explicitement, avec les résultats ci-dessus, que le point matériel reste toujours en contact avec la plaque.

Ceci peut être vérifié sur la force de réaction \vec{F} . Si le point A n'était plus en contact avec la plaque, alors l'amplitude F de cette force s'annulerait à un certain instant. Essayons donc de trouver une forme explicite de cette force F . Pour cela, multiplions (9) par $-\sin \theta$ et (10) par $\cos \theta$ et prenons la somme, on obtient alors

$$-\sin \theta \ddot{u} + \cos \theta \ddot{j} = 2 \dot{\theta} \dot{\theta} = 2\omega \dot{\theta} \quad (17)$$

En combinant (17) et (12) on voit donc que la force F peut s'écrire sous la forme

$$F = 2m\omega \dot{\theta}$$

soit, avec (15),

$$F = 2m a \omega^2 \operatorname{sh} \omega t \quad (18)$$

Puisque $a, \omega > 0$, on voit donc que $\operatorname{sh} \omega t > 0$, $\forall t > 0$, d'où en effet

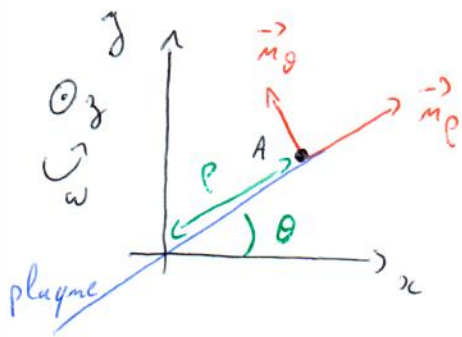
$$F > 0 \quad (19)$$

ce qui assure que la force de réaction de la plaque sur le point matériel A ne s'annule à aucun moment. Ainsi, A reste bien toujours en contact avec la plaque.

3) On souhaite maintenant répéter l'analyse de la question 2), non pas dans le référentiel d'inertie \mathcal{R} , mais

dans le référentiel de la plaque.

Soit donc \mathcal{R}' le référentiel de la plaque et tournant avec elle. Celui-ci correspond à un système de coordonnées cylindriques centré en O , ie $\mathcal{R}' = (O, \vec{n}_\rho, \vec{n}_\theta, \vec{n}_z)$,



avec \vec{n}_ρ orienté le long de la plaque et \vec{n}_θ normal à la plaque, et tel que $\vec{n}_\rho \times \vec{n}_\theta = \vec{n}_z$.

La position $\vec{r}(t)$ du point matériel A dans ce référentiel \mathcal{R}' est donc donnée par

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{n}_\rho + z(t) \vec{n}_z \quad (20)$$

La vitesse $\dot{\vec{r}}$ de A dans ce référentiel est donc simplement

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{n}_\rho + \dot{z} \vec{n}_z \quad (21)$$

⚠ (21) ne doit pas contenir de contributions dues à $d\vec{n}_\rho/dt$, car ce terme se manifeste uniquement dans le référentiel inertiel \mathcal{R} . Dans le référentiel tournant \mathcal{R}' , les vecteurs \vec{n}_ρ et \vec{n}_θ sont fixes.

Ainsi, l'accélération $\ddot{\vec{r}}$ de A dans \mathcal{R}' est

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho} \vec{n}_\rho + \ddot{z} \vec{n}_z \quad (22)$$

Ecrivons maintenant le PFD pour A dans le référentiel tournant \mathcal{R}' . Puisque \mathcal{R}' n'est pas un référentiel inertiel, le PFD dans \mathcal{R}' contiendra, en plus des deux forces

$$\vec{P} = -mg \vec{n}_z \quad \text{et} \quad \vec{F} = F \vec{n}_\theta \quad (23)$$

ie le poids et la force de réaction due à la plaque,

deux forces d'inertie : la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_e ainsi que la force de Coriolis \vec{F}_c , données par

$$(24) \quad \begin{cases} \vec{F}_e = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}(t)) \\ \vec{F}_c = -2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}(t) \end{cases} \quad (24a) \quad (24b)$$

on

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n}_3$$

est le vecteur rotation décrivant la rotation du référentiel tournant \mathcal{R}' par rapport au référentiel d'inertie \mathcal{R} . En combinant (24) avec (20), (21) et (25) on a donc

$$\vec{F}_e = m \rho \omega^2 \vec{n}_\rho \quad \text{et} \quad \vec{F}_c = -2m\omega \dot{\rho} \vec{n}_g \quad (26)$$

le PFD pour A dans \mathcal{R}' est donc

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

soit, avec (22), (23) et (26),

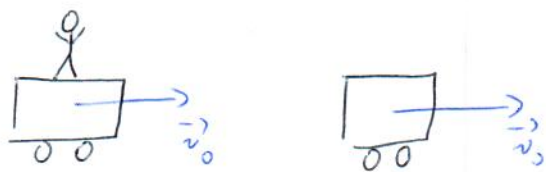
$$(27) \quad (\ddot{\rho} - \omega^2 \rho) \vec{n}_\rho + \left(2\omega \dot{\rho} - \frac{F}{m} \right) \vec{n}_g + (\ddot{z} + g) \vec{n}_z = \vec{0}$$

qui nous permet de retrouver directement les résultats obtenus à la question (2) dans le référentiel inertiel \mathcal{R} .

En effet, (27) selon \vec{n}_ρ nous redonne précisément l'équation différentielle (13), tandis que (27) selon \vec{n}_g nous donne l'expression $F = 2m\omega \dot{\rho}$ déjà obtenue précédemment. Enfin, le PFD (27) selon \vec{n}_z est le même que dans \mathcal{R} , et nous donne directement l'expression (6) de $z(t)$.

Exo 2: deux chariots identiques, de masses M , se déplacent sans frottement l'un derrière l'autre. Sur le chariot arrière se trouve Lucie, de masse m . A l'instant $t=0$, Lucie saute afin de passer sur le chariot avant, sur lequel elle se pose à l'instant t_1 . On souhaite déterminer les vitesses \vec{v}_{ar} et \vec{v}_{av} des chariots arrière et avant une fois que Lucie est sur le chariot avant. On distingue donc 3 différentes situations.

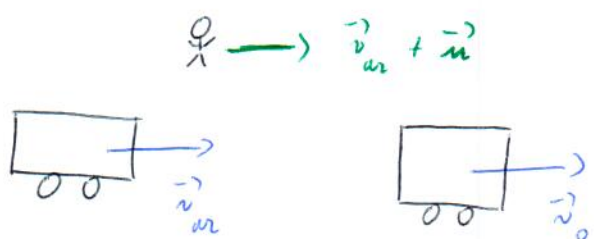
1^{ère} situation : $t < 0$



Dans cette situation, Lucie se trouve sur le chariot arrière. L'ensemble {arrière + Lucie} se déplace à la vitesse \vec{v}_0 , et

le chariot avant se déplace à la même vitesse \vec{v}_0 .

2^{ème} situation : $0 < t < t_1$

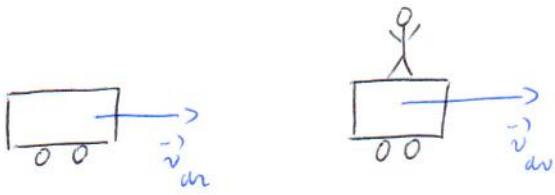


Dans cette situation, Lucie a sauté du chariot arrière et se trouve en l'air, entre les deux chariots. Son saut

a changé la vitesse du chariot arrière, qui est à présent la nouvelle vitesse \vec{v}_{ar} . On désigne par \vec{u} la vitesse de Lucie par rapport au chariot arrière après le saut. Dans le repère inertiel fixe

par rapport auquel la vitesse du chariot arrière est \vec{v}_{ar} ,
 la vitesse de la lumière doit donc être la somme de \vec{u}
 et de la vitesse du chariot arrière, ie $\vec{v}_{ar} + \vec{u}$.
 Le chariot avant n'ayant pas encore été impacté
 par le sort de la lumière, sa vitesse est toujours la
 même que dans la première situation, ie \vec{v}_0 .

3^e situation : $t > t_1$



sa vitesse \vec{v}_{ar} . La vitesse
 du chariot arrière n'a pas
 changé par rapport à la
 toujours donnée par \vec{v}_{ar} .

Dans cette situation, la lumière
 s'est posée sur le chariot
 avant. L'ensemble {avant + lumière}
 se déplace alors à une nouvelle
 vitesse \vec{v}_{ar} .

On utilise maintenant la conservation de l'impulsion
 pour déterminer les vitesses finales \vec{v}_{ar} et \vec{v}_{av} des
 chariots arrière et avant. Une première manière est
 d'écrire la conservation de l'impulsion du système
 total {arrière + avant + lumière} dans les 3 situations.
 Une autre façon de faire est d'écrire la conservation
 de l'impulsion pour

- 1) le système {arrière + lumière} entre la 1^e situation
 $t < t_0$ et la 2^e situation $0 < t < t_1$, puis
- 2) pour le système {avant + lumière} entre la 2^e
 situation $0 < t < t_1$ et la 3^e situation $t > t_1$.

Ces deux manières de procéder sont bien entendues strictement équivalentes.

22

1) Système { arrière + lucie } : l'impulsion $\vec{P}_1^{(t_0)}$ du système dans la 1^{ère} situation est

$$\vec{P}_1^{(t_0)} = (m + \Pi) \vec{v}_0 \quad (1)$$

tandis que l'impulsion $\vec{P}_1^{(t_1)}$ dans la 2^{ème} situation est

$$\vec{P}_1^{(t_1)} = \Pi \vec{v}_{ar} + m (\vec{v}_{ar} + \vec{u}) \quad (2)$$

La conservation de l'impulsion nous assure donc que

$$(m + \Pi) \vec{v}_0 = (m + \Pi) \vec{v}_{ar} + m \vec{u}$$

ce qui donne directement la vitesse \vec{v}_{ar} du chariot arrière après le saut, et on a

$$\vec{v}_{ar} = \vec{v}_0 - \frac{m}{m + \Pi} \vec{u} \quad (3)$$

2) Système { avant + lucie } : l'impulsion $\vec{P}_2^{(t_1)}$ de ce système dans la 2^{ème} situation est

$$\vec{P}_2^{(t_1)} = \Pi \vec{v}_0 + m (\vec{v}_{ar} + \vec{u})$$

soit, avec l'expression (3) de \vec{v}_{ar} ,

$$\vec{P}_2^{(t_1)} = (m + \Pi) \vec{v}_0 + \frac{m \Pi}{m + \Pi} \vec{u} \quad (4)$$

l'impulsion $\vec{P}_2(t_2)$ du système dans la 3^e situation est quant à elle donnée par

$$\vec{P}_2(t_2) = (m + \Pi) \vec{v}_{av} \quad (5)$$

la conservation de l'impulsion dans ce cas nous donne donc

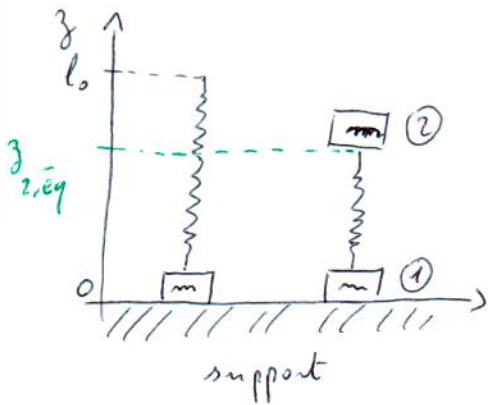
$$(m + \Pi) \vec{v}_0 + \frac{m \Pi}{m + \Pi} \vec{u} = (m + \Pi) \vec{v}_{av}$$

d'où on tire directement la vitesse finale \vec{v}_{av} du chariot avant, et on a

$$\vec{v}_{av} = \vec{v}_0 + \frac{m \Pi}{(m + \Pi)^2} \vec{u} \quad (6)$$

Notons sur (3) et (6) que la vitesse finale \vec{v}_{av} du chariot arrière est inférieure à sa vitesse initiale \vec{v}_0 , tandis que la vitesse finale \vec{v}_{av} du chariot avant est supérieure à sa vitesse initiale \vec{v}_0 .

Exo 3 : soient deux masses ponctuelles identiques m , reliées par un ressort sans masse de constante de raideur h et de longueur au repos l_0 . Le système est supposé être vertical, avec la masse du bas posée sur un support horizontal. On désigne par ① la masse du bus, posée sur le support, et par ② la masse du haut. Étudions tout d'abord la situation d'équilibre



du système, dans laquelle la masse ② est immobile. Puisque $m > 0$, la longueur du ressort entre les deux masses dans cette situation doit être inférieure à la longueur au repos l_0 du ressort.

Écrivons $z_{2,eq}$ la position de la masse ② dans cette situation d'équilibre. L'origine 0 est prise sur le support : $z_{2,eq}$ désigne donc simplement la hauteur de ② par rapport au support (sur lequel est posée la masse ①). Deux forces s'exercent sur la masse ② :

- i) son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$
- ii) la force de rappel du ressort $\vec{F}_2^{(eq)} = h(l_0 - z_{2,eq}) \vec{u}_z$

Puisque l'accélération de ② est nulle à l'équilibre, on sait que la somme des forces s'annule dans ce cas, ie

$$\vec{P} + \vec{F}_2^{(eq)} = -mg \vec{u}_z + h(l_0 - z_{2,eq}) \vec{u}_z = \vec{0}$$

d'où on tire directement l'expression de la position
 $z_{2,eq}$ de la masse ② dans la situation d'équilibre,

$$z_{2,eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \quad (1)$$

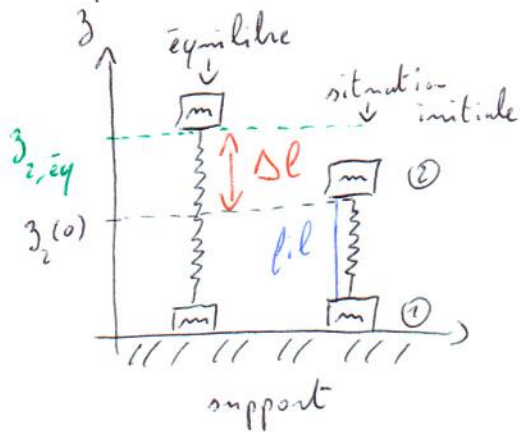
Supposons maintenant qu'un fil relie les deux masses
 ① et ② de telle manière à ce que le ressort soit
 comprimé d'une longueur $\Delta l > 0$ par rapport à sa position
 d'équilibre (et donc pas par rapport à sa longueur au
 repos l_0 !). A l'instant initial $t=0$ on brûle le fil,

et on souhaite alors étudier la
 dynamique du système pour $t > 0$.

On désignera par

$z_1(t)$ = position de la masse ①
 (du bas) à l'instant t

$z_2(t)$ = position de la masse ② (du
 haut) à l'instant t



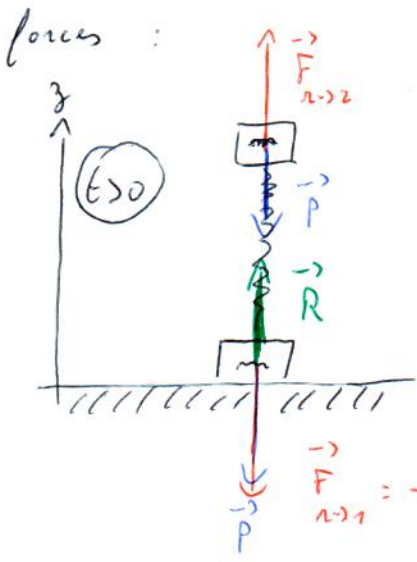
lorsque l'on brûle le fil à l'instant initial $t=0$,
 la masse ① est immobile sur le support, tandis que
 la masse ② se met en mouvement sans vitesse initiale.
 Les conditions initiales (C.I.) à $t=0$ sont donc

$$z_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{z}_2(0) = z_{2,eq} - \Delta l \quad (2)$$

$$\text{et} \quad \ddot{z}_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z}_2(0) = 0 \quad (3)$$

1) Lorsque l'on brûle le fil à $t=0$, et puisque le ressort est comprimé d'une longueur $\Delta l > 0$ par rapport à sa situation d'équilibre, le ressort exerce une force sur la masse ② dirigée vers le haut (donc selon $+\vec{u}_z$). Par action-réaction, la force exercée par le ressort sur la masse ① est l'opposée, et est donc dirigée vers le bas. La masse ② va ensuite monter pendant un certain temps, et potentiellement atteindre une hauteur supérieure à l_0 : dans un tel cas, la force exercée par le ressort change d'orientation. La force du ressort sur ① serait alors dirigée vers le haut, et pourrait, si elle est suffisamment importante, faire décoller cette masse ①. Ceci ne peut se produire que si la compression initiale Δl est plus grande qu'une certaine valeur limite. On souhaite donc déterminer cette valeur limite de Δl .

Effectuons tout d'abord le bilan des forces s'appliquant sur le système pour $t > 0$, i.e. après avoir brûlé le fil (\Rightarrow donc pas de force de tension du fil sur les masses ① et ② !). La masse ② est soumise à deux



- i) son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$
- ii) la force de rappel du ressort, donnée par

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 2} = k(l_0 - z_2(t))\vec{u}_z$$

La masse ① quant à elle est soumise à 3 forces (avant d'avoir potentiellement décollé) :

i) son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_3$

ii) la force de rappel du ressort, donnée par

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -k(l_0 - z_2(t)) \vec{u}_3$$

iii) la force de réaction normale $\vec{R} = R \vec{u}_3$, due au contact entre la masse ① et le support.

Tant que la masse ① est en contact avec le support, elle est immobile et subit la force de réaction \vec{R} . Ainsi, avant d'avoir décollé, la masse ① est immobile et la somme des forces s'appliquant sur elle s'annule comme conséquence du principe fondamental de la dynamique (PFD), soit

$$\vec{P} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{R} = \vec{0}$$

ce qui nous permet donc d'exprimer l'amplitude R de la force de réaction normale sous la forme

$$R = mg + k(l_0 - z_2(t)) \quad (4)$$

Notre stratégie est maintenant de dire que lorsque la masse ① décolle, elle perd tout contact avec le support : cela signifie donc que l'amplitude R de la force de réaction avec le support doit s'annuler. Or, l'expression (4) de R fait intervenir la position $z_2(t)$ de la masse ② à l'instant t . On doit donc d'abord trouver $z_2(t)$ avant de pouvoir obtenir la condition sur Δl permettant d'annuler R .

Pour cela, on doit simplement résoudre le PFD pour la masse ②, qui s'écrit

$$m \ddot{z}_2 = \vec{P} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3}$$

3
3

soit

$$m \ddot{z}_2 = -mg + k(l_0 - z_2)$$

que l'on peut réécrire en termes de z_2, \vec{e}_y (donné par (1)), et on a alors l'équation différentielle

$$\ddot{z}_2 + \frac{k}{m} (z_2 - z_{2, \vec{e}_y}) = 0 \quad (5)$$

du deuxième ordre, inhomogène et à coefficients constants. Celle-ci se résout simplement avec les méthodes discutées dans la série II.

NB: plutôt que résoudre séparément les équations homogènes et inhomogènes, il peut être utile de définir la nouvelle fonction $\tilde{z}_2 \equiv z_2 - z_{2, \vec{e}_y}$, qui satisfait une équation homogène, directement soluble.

On montre alors que la solution générale de (5) est de la forme

$$(6) \quad z_2(t) = z_{2, \vec{e}_y} + A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

les constantes A et B se déterminent au moyen des CI (2) et (3), et, en introduisant également la notation

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

on voit donc que la position $z_2(t)$ de la masse
 ② au cours du temps est donnée par

$$z_2(t) = z_{2, \bar{e}_y} - \Delta l \cos \omega t \quad (8)$$

avant que la masse ① ne décolle.

On substitue maintenant cette expression (8) dans l'expression
 (4) de la réaction normale R , et on obtient, en
 se rappelant l'expression (1) de z_{2, \bar{e}_y}

$$R = 2mg + h \Delta l \cos \omega t \quad (9)$$

Dépendant du mouvement de la masse ②, la force
 de réaction R oscille donc au cours du temps, entre
 une valeur maximale R_{\max} (lorsque $\cos \omega t = 1$) et
 une valeur minimale R_{\min} (lorsque $\cos \omega t = -1$).

Si cette valeur minimale R_{\min} est positive, alors
 la masse ① ne peut décoller à aucun instant : elle
 restera toujours en contact avec le support. Par
 contre, $R_{\min} = 0$ nous donne précisément la valeur
 critique de Δl à partir de laquelle la masse ①
 peut décoller. Ainsi, la condition pour laquelle la
 masse ① peut décoller est

$$R_{\min} = 2mg - h \Delta l \leq 0$$

d'où la condition recherchée sur Δl

$$(10) \quad \Delta l \geq \frac{2mg}{h} = \frac{2g}{\omega^2}$$

(condition pour que
 ① puisse décoller)

2) On suppose maintenant que la condition (11) est satisfaite, et donc que la masse ① décolle. Soit $t_0 > 0$ l'instant précis du décollage de ①. Celui-ci doit donc correspondre à l'instant où la force de réaction normale R du support s'annule, i.e. avec l'expression (9) de R 34

$$2mg + k\Delta l \cos \omega t_0 = 0$$

d'où

$$\cos \omega t_0 = -\frac{2mg}{k\Delta l} = -\frac{2g}{\omega^2 \Delta l} \quad (11)$$

où $t_0 > 0$ doit être le plus petit temps tel que la condition (11) soit satisfaite.

Soit maintenant $z_G(t)$ la position, à l'instant t , du centre de masse (CM) G du système { masse ① + masse ② + ressort }, de masse $2m$ (on rappelle que le ressort est de masse nulle). On sait que les seules forces s'appliquant sur le CM sont les forces extérieures. Puisque l'on suppose que la masse ① a décollé, le support n'exerce pas de force sur le système. La seule force s'appliquant sur G est donc le poids, et le PFD pour le CM s'écrit donc

$$2m \ddot{z}_G = -2mg, \quad t > t_0$$

soit

$$\ddot{z}_G = -g, \quad t > t_0 \quad (12)$$

qui s'intègre facilement.

⚠ le PFD (12) suppose que la masse ① n'est plus

en contact avec le support, et est donc seulement valable pour des instants t tels que $t > t_0$. On doit donc intégrer (12) entre t_0 et t , et pas entre 0 et t !

La position du centre de masse est donc donnée par

$$(13) \quad z_G(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + \dot{z}_G(t_0)(t-t_0) + z_G(t_0)$$

où l'on doit maintenant déterminer la position $z_G(t_0)$ et la vitesse $\dot{z}_G(t_0)$ du CG à l'instant $t=t_0$ où la masse ① décolle.

Par définition du CG, $z_G(t)$ est reliée à la position $z_1(t)$ de la masse ① et la position $z_2(t)$ de ② par

$$(14) \quad z_G(t) = \frac{m z_1(t) + m z_2(t)}{2m} = \frac{z_1(t) + z_2(t)}{2}$$

Puisque $t=t_0$ désigne l'instant précis où ① décolle, on doit avoir

$$z_1(t_0) = 0 \quad (15)$$

La position $z_2(t_0)$ de ② peut ensuite se calculer à partir de l'expression (8) de $z_2(t)$, qui reste valable pour $t=t_0$ (mais pas pour $t > t_0$), et on obtient, en utilisant la condition (11) satisfaite par t_0 ,

$$z_2(t_0) = z_{2,\bar{e}y} - \Delta l \cos \omega t_0 = z_{2,\bar{e}y} + \frac{2g}{\omega^2}$$

et donc, en se rappelant les expressions (1) de $z_{2,\bar{e}y}$ et (7) de ω ,

$$z_2(t_0) = l_0 + \frac{g}{\omega^2} \quad (16)$$

35

En combinant (14) avec (15) et (16) on voit donc que la position du CD à l'instant t_0 est donnée par

$$z_G(t_0) = \frac{1}{2} \left(l_0 + \frac{g}{\omega^2} \right) \quad (17)$$

De plus, la masse ① décolle sans vitesse initiale, d'où

$$\dot{z}_1(t_0) = 0 \quad (18)$$

La vitesse $\dot{z}_2(t_0)$ de la masse ② à l'instant t_0 se détermine ensuite avec (8). Puisque

$$\dot{z}_2(t) = \omega \Delta l \sin \omega t$$

on obtient pour $\dot{z}_2(t_0)$, en utilisant la condition (11) satisfaite par t_0 ,

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t_0) &= \omega \Delta l \sin \omega t_0 = \omega \Delta l \sqrt{1 - \cos^2 \omega t_0} \\ &= \omega \Delta l \sqrt{1 - \frac{4g^2}{\omega^4 \Delta l^2}} \end{aligned}$$

soit

$$\dot{z}_2(t_0) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^4 \Delta l^2 - 4g^2} \quad (19)$$

En combinant (14) avec (18) et (19) on voit donc que la vitesse du CD à l'instant t_0 est donnée par

$$\dot{z}_G(t_0) = \frac{1}{2\omega} \sqrt{\omega^4 \Delta l^2 - 4g^2} \quad (20)$$

On substitue maintenant (17) et (20) dans l'expression (13) de $z_G(t)$, et on obtient

$$(21) \quad z_G(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + \frac{1}{2\omega} \sqrt{\omega^4 \Delta l^2 - 4g^2} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left(l_0 + \frac{g}{\omega^2} \right)$$

Soit maintenant $t_{\text{max}} > t_0$ l'instant auquel le CO atteint sa hauteur maximale. A cet instant, sa vitesse doit donc s'annuler, soit avec (21)

$$\dot{z}_G(t_{\text{max}}) = 0 = \frac{1}{2\omega} \sqrt{\omega^4 \Delta l^2 - 4g^2} - g(t_{\text{max}} - t_0)$$

d'où

$$t_{\text{max}} = t_0 + \frac{1}{2\omega g} \sqrt{\omega^4 \Delta l^2 - 4g^2} \quad (22)$$

On substitue maintenant l'expression (22) de t_{max} dans (21) afin de trouver la hauteur maximale $z_G(t_{\text{max}})$ atteinte par le CO, et on trouve, après avoir simplifié l'expression résultante,

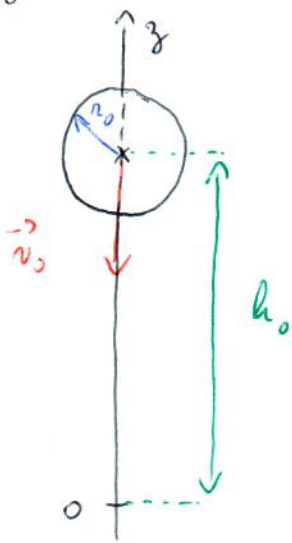
$$z_G(t_{\text{max}}) = \frac{l_0}{2} + \frac{\omega^2 \Delta l^2}{8g}$$

et donc, en se rappelant de la définition (7) de ω ,

$$\boxed{z_G(t_{\text{max}}) = \frac{l_0}{2} + \frac{k \Delta l^2}{8mg}} \quad (23)$$

Exo 5 : une goutte d'eau sphérique tombe verticalement dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Ceci permet une condensation continue au cours du temps, et la goutte va donc voir son volume augmenter.

Soit ρ la masse volumique de l'eau. Soient $t=0$ l'instant initial, r_0 le rayon initial de la goutte, v_0 sa vitesse initiale et h_0 sa hauteur initiale. On étudie le mouvement de la goutte dans la direction z verticale.



NB : on suppose qu'initialement la goutte est déjà en train de tomber. Sa vitesse initiale est donc dirigée vers le bas, ie

$$\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_z \quad (1)$$

Soit V_0 le volume initial de la goutte, on a

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad (2)$$

La masse initiale m_0 de la goutte est donc donnée par

$$m_0 = \rho V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho \quad (3)$$

Soit maintenant $m(t)$ la masse de la goutte à un instant $t \geq 0$. Soit également $r(t)$ le rayon de la goutte à l'instant t . On sait que le taux de croissance de la masse de la goutte par unité de temps, c'est à dire la quantité dm/dt , est proportionnelle à l'aire $S(t)$ de la surface de la goutte à l'instant t , c'est à dire $4\pi r^2(t)$ en supposant que la goutte reste sphérique au cours du temps. Le coefficient de proportionnalité étant noté α ,

on a donc

$$\frac{dm}{dt} = k\bar{v} \times r^2 \quad (4)$$

NB : il est clair sur (4) que la dimension du coefficient k est effectivement une masse divisée par un temps fois une distance au carré, et s'exprime donc en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$

On considère ici un système dont la masse m change au cours du temps, selon l'équation (4). Il faut donc être attentif à écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) en termes de l'impulsion totale de la goutte (et pas simplement comme $m\vec{a} = \vec{F}$!). L'impulsion de la goutte à l'instant t est donnée par $m(t)\vec{v}(t)$, \vec{v} étant la vitesse de la goutte. Puisque l'on néglige la résistance de l'air, la goutte est soumise à une seule force : son poids

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_3$$

Ainsi, le PFD pour la goutte nous donne

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -mg\vec{u}_3 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\vec{u}_3$$

soit, puisque $\vec{v} = -v\vec{u}_3$ et dm/dt est donné par (4),

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k\bar{v} \times r^2}{m} v = g \quad (5)$$

De plus, notons que la masse de la goutte à l'instant t est simplement donnée par

$$m(t) = \rho V(t) \quad (6)$$

avec $V(t)$ le volume de la goutte à l'instant t , relié au rayon $r(t)$ via

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi r^3(t) \quad (7)$$

En combinant (5) avec (6) - (7), on obtient donc l'équation différentielle pour v

$$\left[\frac{dv}{dt} + \frac{3\alpha}{\rho r} v = g \right] \quad (8)$$

On souhaite maintenant trouver l'expression de $r(t)$.

Pour ce faire, notons que (6) et (7) nous donnent

$$m(t) = \frac{4}{3} \pi \rho r^3(t) \quad (9)$$

d'où

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi \rho r^2 \frac{dr}{dt} \quad (10)$$

On peut donc combiner (4) avec (10) afin d'obtenir une équation différentielle (du premier ordre) pour le rayon $r(t)$ de la goutte, et on a

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{\rho} \quad (11)$$

Cette équation différentielle s'intègre directement entre 0 et t pour nous donner l'évolution temporelle du rayon r de la goutte, et on a

$$\left[r(t) = r_0 + \frac{\alpha t}{\rho} \right] \quad (12)$$

On substitue maintenant cette expression de $r(t)$ dans

l'équation (8) pour avoir

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3\alpha}{\rho r_0 + \alpha t} v = g$$

(13)

Cette équation différentielle inhomogène est du premier ordre, et peut donc se résoudre grâce aux méthodes décrites dans la série d'exercices II. La solution générale $v(t)$ de (13) est donc la somme de la solution homogène générale $v_h(t)$ et d'une solution particulière $v_p(t)$. On montre que

$$v_h(t) = \frac{C}{(\rho r_0 + \alpha t)^3} \quad (14)$$

où C est une constante (à déterminer plus tard au moyen des conditions initiales), et

$$v_p(t) = \frac{g}{4\alpha} (\rho r_0 + \alpha t) \quad (15)$$

La solution générale de (13) est donc donnée par

$$\begin{aligned} v(t) &= v_h(t) + v_p(t) \\ &= \frac{C}{(\rho r_0 + \alpha t)^3} + \frac{g}{4\alpha} (\rho r_0 + \alpha t) \end{aligned} \quad (16)$$

On utilise maintenant la condition initiale

$$v(0) = v_0$$

afin de déterminer la constante C . On prend donc

$t=0$ dans (16), et on montre alors que

(53)

$$C = \rho r_0^3 \left(v_0 - \frac{g \rho r_0}{4\alpha} \right)$$

(17)

On substitue donc cette expression de C dans (16), et on voit alors que la vitesse de la goutte peut s'écrire sous la forme

$$(18) \quad v(t) = \left(v_0 - \frac{g \rho r_0}{4\alpha} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha t}{\rho r_0} \right)^3} + \frac{g \rho r_0}{4\alpha} \left(1 + \frac{\alpha t}{\rho r_0} \right)$$

Connaissant la vitesse de la goutte à tout instant t , il est maintenant facile de déterminer sa hauteur $z(t)$ à tout instant t . En effet, on a par définition

$$v(t) = \frac{dz}{dt}$$

d'où directement

$$z(t) = z(0) + \int_0^t dt' v(t')$$

où $z(0)$ est la hauteur initiale de la goutte, ie

$$z(0) = h_0$$

(18)

L'expression (18) de la vitesse s'intègre sans difficulté, et on obtient donc l'expression suivante pour la hauteur $z(t)$ de la goutte à l'instant t :

$$z(t) = h_0 + \frac{1}{2} \frac{\rho r_0}{\alpha} \left(v_0 - \frac{g \rho r_0}{4\alpha} \right) \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha t}{\rho r_0} \right)^2} \right]$$

(20)

$$+ \frac{g}{2} \left(\frac{\rho r_0}{2\alpha} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha t}{\rho r_0} \right)^2 - 1 \right]$$

Exo 7: soit un disque D homogène horizontal de masse M , rayon R et centre O pouvant tourner sans frottement autour de l'axe vertical fixe (O, \vec{u}_z) .

Un insecte de masse m suit le bord du disque (à une distance R de O donc), et avance avec une vitesse (linéaire) v par rapport au disque. On

suppose que l'insecte s'est mis en mouvement par rapport au disque à l'instant $t=0$. Avant, ie pour $t < 0$, le disque et l'insecte sont supposés être au repos.

C'est précisément l'insecte qui, en se mettant en mouvement, met le disque en mouvement de rotation autour de l'axe de rotation (Oz) .

On utilise la conservation du moment cinétique total du système { disque + insecte }, que l'on démontre au moyen du théorème du moment cinétique, et on a

$$\vec{L}_{\text{tot}} \xrightarrow{(t < 0)} = \vec{L}_{\text{tot}} \xrightarrow{(t > 0)} \quad (1)$$

avec $\vec{L}_{\text{tot}} \xrightarrow{(t < 0)}$ le moment cinétique total avant que l'insecte ne soit en mouvement, et $\vec{L}_{\text{tot}} \xrightarrow{(t > 0)}$ le moment cinétique total après sa mise en mouvement.

Puisque pour $t < 0$ le disque et l'insecte sont supposés être immobiles, on a tout de suite

$$\vec{L}_{\text{tot}} \xrightarrow{(t < 0)} = \vec{0} \quad (2)$$

Lorsque $t > 0$, l'insecte et le disque sont en mouvement. Le moment cinétique total est alors donné par, en l'écrivant par rapport au centre O du disque,

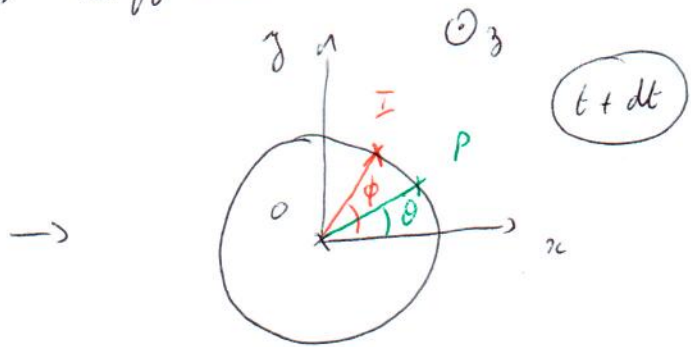
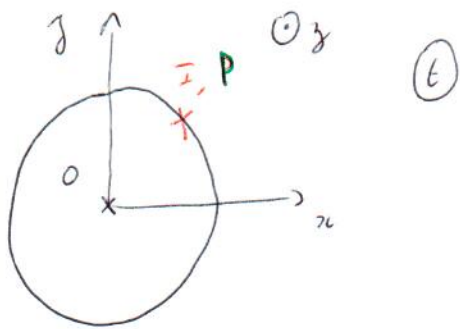
$$\vec{L}_{\text{tot}} \xrightarrow{(t > 0)} = \vec{L}_{\text{insecte}/O} + \vec{L}_{\text{disque}/O} \quad (3)$$

avec

$\vec{I}_{\text{disque}/O}$ = moment cinétique du disque par rapport à O

$\vec{I}_{\text{I}/O}$ = moment cinétique de l'insecte par rapport à O

On introduit deux angles différents :



- i) l'angle ϕ , qui repère la position de l'insecte I
- ii) l'angle θ , qui repère la position du point P du disque où se trouvait l'insecte à l'instant t .

Le disque tourne à une vitesse angulaire (4)

$$\omega = \dot{\theta}$$

autour de l'axe (Oz) . Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ décrivant la rotation du disque est donc donné par (5)

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Ainsi, le moment cinétique $\vec{I}_{\text{disque}/O}$ du disque est, en projection selon l'axe de rotation \vec{u}_z ,

$$\vec{u}_z \cdot \vec{I}_{\text{disque}/O} = \bar{I}_{(Oz)} \vec{\omega} \cdot \vec{u}_z$$

avec $\bar{I}_{(Oz)}$ le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe (Oz) . On suit d'après la série V de inertie que ce moment d'inertie est donné par

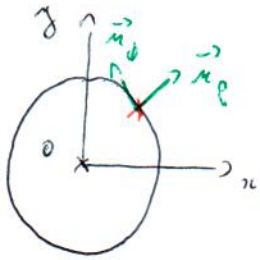
$$\vec{L}_{(O_3)} = \frac{MR^2}{2}$$

7
2

On obtient donc pour $\vec{L}_{\text{disque}/O} \cdot \vec{n}_3$

$$\vec{n}_3 \cdot \vec{L}_{\text{disque}/O} = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \quad (6)$$

Calculons maintenant le moment cinétique $\vec{L}_{I/O}$ de l'insecte par rapport à O . Puisque l'insecte suit le bord du disque au cours de son mouvement, sa vitesse \vec{v}_I est orthoradiale, ie



$$\vec{v}_I = v_I \vec{n}_\phi$$

De plus, sa vitesse linéaire v_I est simplement reliée à l'angle ϕ via

$$v_I = R \dot{\phi}$$

On a donc par définition du moment cinétique

$$\vec{L}_{I/O} = \vec{OI} \times m \vec{v}_I = m R \vec{n}_\rho \times R \dot{\phi} \vec{n}_\phi = m R^2 \dot{\phi} \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\phi$$

et donc, puisque $\vec{n}_\rho \times \vec{n}_\phi = \vec{n}_3$,

$$\vec{L}_{I/O} = m R^2 \dot{\phi} \vec{n}_3 \quad (7)$$

On obtient donc, en combinant (3) avec (6) et (7), le moment cinétique total (en projetant selon \vec{n}_3)

$$\vec{n}_3 \cdot \vec{L}_{\text{tot}} = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} + m R^2 \dot{\phi} \quad (8)$$

La conservation du moment cinétique total, ie (1), nous donne donc avec (2) et (8) et en projetant selon \vec{n}_3

$$\frac{MR^2}{2} \dot{\theta} + m R^2 \dot{\phi} = 0 \quad (9)$$

De plus, notons que la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ de l'insecte a deux contributions :

- i) la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ due à la rotation du disque, qui serait présente si l'insecte était immobile sur le disque et que le disque tourne ;
- ii) la vitesse angulaire due au mouvement de l'insecte par rapport au disque avec une vitesse linéaire v , ie la vitesse angulaire v/R , qui serait présente si le disque était immobile et que l'insecte se déplaçait sur le disque

On a donc la relation (que l'on peut également démontrer par la loi de composition des vitesses)

$$\dot{\phi} = \dot{\theta} + \frac{v}{R} \quad (10)$$

En substituant (10) dans (8) on obtient donc

$$\frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} + mR^2 \ddot{\theta} + mRv = 0$$

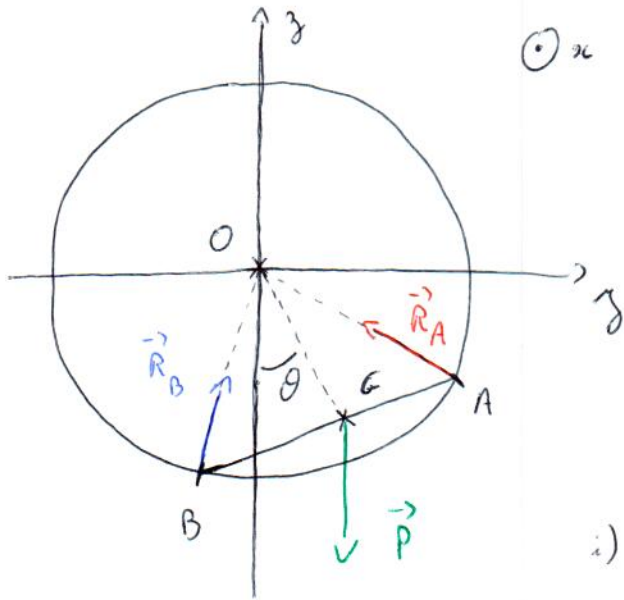
ce qui nous donne donc directement l'équation différentielle (du premier ordre) pour $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = - \frac{2mv}{R(N+2m)} \quad (11)$$

qui décrit le mouvement du disque (puisque, par définition, θ repère la position d'un point du disque à l'instant t). En supposant que l'insecte avance avec une vitesse (linéaire) v constante, et en supposant que à l'instant initial $t=0$ l'insecte se trouve sur l'axe (Ox) , ie $\theta(0) = 0$, on obtient donc

$$\theta(t) = - \frac{2mv}{R(N+2m)} t$$

Exo 8 : soit une tige rectiligne de masse m et longueur L qui glisse sans frottement par ses extrémités A et B sur la paroi intérieure d'un cylindre de rayon $R > L/2$. L'axe principal du cylindre sera pris comme l'axe (Ox) , et le mouvement de la tige se fait dans le plan (yz) .



Soit G le centre de masse (CM) de la tige (supposée homogène). On définit l'angle θ comme étant l'angle entre les vecteurs $-\vec{n}_z$ et \vec{OG} .

La tige subit trois forces :

i) son poids $\vec{P} = -mg\vec{n}_z$, s'appliquant au CM G

ii) une force de réaction \vec{R}_A du cylindre sur la tige, s'appliquant au point A de la tige

iii) une force de réaction \vec{R}_B du cylindre sur la tige, s'appliquant au point B .

Ces trois forces sont des forces extérieures à la tige.

Notons que puisque l'on néglige les frottements, les réactions \vec{R}_A et \vec{R}_B sont normales au cylindre en A et B , et sont donc dirigées selon \vec{AO} et \vec{BO} .

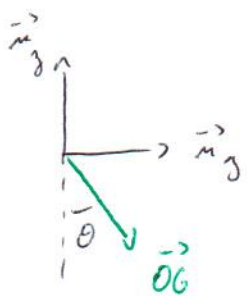
Soit donc \vec{l}_0 le moment cinétique de la tige par rapport à O , le théorème du moment cinétique est

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{\Gamma}_0^{(ext)} \quad (1)$$

d'où $\vec{\Pi}_0^{(ext)}$ est le moment total des forces extérieures par rapport au point O , soit ici

$$\vec{\Pi}_0^{(ext)} = \vec{OG} \times \vec{P} + \underbrace{\vec{OA} \times \vec{R}_A}_{= \vec{0} \text{ car } \vec{OA} \parallel \vec{R}_A} + \underbrace{\vec{OB} \times \vec{R}_B}_{= \vec{0} \text{ car } \vec{OB} \parallel \vec{R}_B}$$

d'où
$$\vec{\Pi}_0^{(ext)} = \vec{OG} \times \vec{P} \quad (2)$$



le vecteur \vec{OG} se décompose sur les vecteurs de base \vec{n}_2 et \vec{n}_3 selon

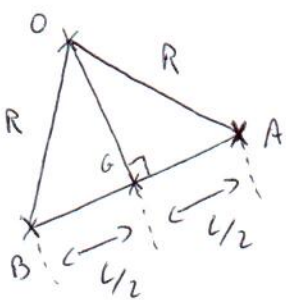
$$\vec{OG} = |\vec{OG}| \sin \theta \vec{n}_2 - |\vec{OG}| \cos \theta \vec{n}_3$$

ce qui donne donc pour $\vec{\Pi}_0^{(ext)}$

$$\vec{\Pi}_0^{(ext)} = - \left(|\vec{OG}| \sin \theta \vec{n}_2 - |\vec{OG}| \cos \theta \vec{n}_3 \right) \times mg \vec{n}_3$$

soit
$$\vec{\Pi}_0^{(ext)} = - mg |\vec{OG}| \sin \theta \vec{n}_2 \quad (3)$$

la longueur $|\vec{OG}|$ s'obtient ensuite au moyen du théorème de Pythagore, et on a



$$|\vec{OG}| = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L^2}$$

d'où pour (3)

$$\vec{\Pi}_0^{(ext)} = - \frac{mg}{2} \sqrt{4R^2 - L^2} \sin \theta \vec{n}_2 \quad (4)$$

Puis que $\vec{\Pi}_0^{(ext)}$ est selon \vec{n}_2 , calculons maintenant le

projection du moment cinétique \vec{L}_O selon \vec{u}_x . On a (8)

$$\vec{u}_x \cdot \vec{L}_O = \bar{I}_{(Ox)} \dot{\theta} \quad (5)$$

avec $\bar{I}_{(Ox)}$ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Ox) , ce dernier peut s'exprimer comme (voir la série \bar{I} de cinétique)

$$\bar{I}_{(Ox)} = \bar{I}_\Delta + m d^2((Ox), \Delta) \quad (6)$$

avec Δ l'axe parallèle à (Ox) mais passant par le CG de la tige. On sait (voir série \bar{I}) que

$$\bar{I}_\Delta = \frac{mL^2}{12} \quad (7)$$

et de plus on a

$$d^2((Ox), \Delta) = |\vec{OG}|^2 = \frac{1}{4} (4R^2 - L^2) \quad (8)$$

En combinant (6) avec (7) et (8) on obtient donc

$$\bar{I}_{(Ox)} = mR^2 - \frac{mL^2}{6}$$

d'où pour (5)

$$\vec{u}_x \cdot \vec{L}_O = \frac{m}{6} (6R^2 - L^2) \dot{\theta} \quad (9)$$

La projection du théorème du moment cinétique (1) selon \vec{u}_x nous donne donc, avec (4) et (9),

$$\frac{m}{6} (6R^2 - L^2) \ddot{\theta} = - \frac{mg}{2} \sqrt{4R^2 - L^2} \sin \theta$$

d'où on déduit l'équation différentielle (du second ordre) pour l'angle θ

$$\ddot{\theta} + 3g \frac{\sqrt{4R^2 - L^2}}{6R^2 - L^2} \sin \theta = 0 \quad (10)$$

Si l'on considère maintenant uniquement les petites oscillations de la tige, ie $\theta \ll 1$, on peut approximer $\sin \theta$ par $\sin \theta \sim \theta$ (petites oscillations)

ce qui simplifie l'équation différentielle (10) en

$$(11) \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0} \quad (\text{petites oscillations})$$

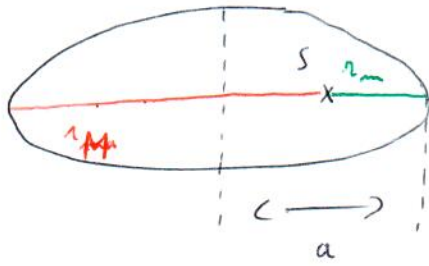
où la pulsation ω est définie par

$$\omega = \sqrt{3g \frac{\sqrt{4R^2 - L^2}}{6R^2 - L^2}} \quad (12)$$

La période T des petites oscillations de la tige s'obtient ensuite facilement avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Exo 3: 1) une planète évolue autour du soleil sur une ellipse telle que les distances minimale et maximale entre le soleil et la planète sont respectivement r_m et r_D .



Soit a le demi grand axe de l'ellipse, on a par définition

$$2a = r_m + r_D$$

soit

$$a = \frac{r_m + r_D}{2} \quad (1)$$

La 3^e loi de Kepler nous donne

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{G(N+m)} a^3 \quad (2)$$

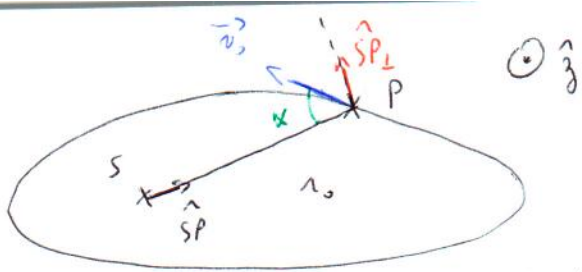
où τ est la période de révolution de la planète autour du soleil, G est la constante gravitationnelle et m est la masse de la planète. En supposant $m \ll N$ on a donc

$$\tau^2 \approx \frac{4\pi^2}{GN} a^3$$

et donc avec (1)

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 (r_m + r_D)^3}{2GN} \quad (3)$$

2) une planète P évolue autour du soleil S sur une orbite elliptique. A l'instant t_0 où elle se trouve à la distance r_0 de S sa vitesse est \vec{v}_0 . Cette vitesse fait un angle α avec le vecteur position \vec{SP} .



Soit \hat{SP} le vecteur unitaire dans la direction \vec{SP} . Soit \hat{SP}_\perp le vecteur perpendiculaire à \hat{SP} , et soit \hat{z} le vecteur perpendiculaire à

\hat{SP} et \hat{SP}_\perp et tel que $(\hat{SP}, \hat{SP}_\perp, \hat{z})$ forme un trièdre direct. Le vitesse \vec{v}_0 se décompose sur \hat{SP} et \hat{SP}_\perp ,

$$\vec{v}_0 = -v_0 \cos \alpha \hat{SP} + v_0 \sin \alpha \hat{SP}_\perp \quad (4)$$

Le moment cinétique $\vec{L}_{P/S}(t_0)$ à l'instant t_0 est donc donné par

$$\vec{L}_{P/S}(t_0) = m \vec{SP} \times \vec{v}_0 = m r_0 \hat{SP} \times (-v_0 \cos \alpha \hat{SP} + v_0 \sin \alpha \hat{SP}_\perp)$$

et donc

$$\vec{L}_{P/S}(t_0) = m r_0 v_0 \sin \alpha \hat{z} \quad (5)$$

Or le théorème du moment cinétique nous donne

$$\frac{d\vec{L}_{P/S}}{dt} = \vec{\tau}_S^{(ext)} = \vec{SP} \times \vec{F}_g$$

où \vec{F}_g est la force de gravitation, dirigée selon \vec{SP} , d'où

$$\frac{d\vec{L}_{P/S}}{dt} = \vec{0}$$

et donc

$$\vec{L}_{P/S}(t) = \text{constante} \quad (6)$$

De plus, en tout point de la trajectoire, si la planète est à une distance r de S , sa vitesse \vec{v} peut être

décomposée en une vitesse radiale \vec{v}_r et une vitesse tangentielle \vec{v}_θ , ie

$$\vec{v} = v_r \hat{SP} + v_\theta \hat{SP}_\perp \quad (7)$$

A tout instant t le moment cinétique de la planète par rapport à S est donc donné par

$$\vec{L}_{P/S}(t) = m \vec{r} \times \vec{v} = m r \hat{SP} \times (v_r \hat{SP} + v_\theta \hat{SP}_\perp)$$

soit

$$\vec{L}_{P/S}(t) = m r v_\theta \hat{z} \quad (8)$$

En combinant la conservation du moment cinétique (6) avec (5) et (8) on obtient donc

$$r v_\theta = r_0 v_0 \sin \alpha \quad (9)$$

Or, lorsque la planète est à une distance minimale ou maximale du soleil, disons \tilde{r} , sa vitesse \tilde{v} est purement orthogonale, ie $\tilde{v} = v_\theta$. On a donc par (9)

$$\tilde{r} \tilde{v} = r_0 v_0 \sin \alpha \quad (\text{périhélie ou aphélie}) \quad (10)$$

De plus, l'énergie totale E de la planète est conservée, d'où en écrivant l'énergie à l'instant t_0 et à l'instant \tilde{t} (pour le périhélie ou l'aphélie)

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{r_0} = \frac{1}{2} m \tilde{v}^2 - G \frac{Mm}{\tilde{r}} \quad (11)$$

Or (10) nous donne la relation

$$\tilde{v} = \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{\tilde{r}} \quad (12)$$

En substituant (12) dans la conservation de l'énergie (11), et en multipliant par \tilde{r}^2 , on obtient donc

$$\left(\frac{GM}{\tilde{r}_0} - \frac{v_s^2}{2} \right) \tilde{r}^2 - GM \tilde{r} + \frac{1}{2} r_s^2 v_s^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (13)$$

qui est simplement une équation quadratique en \tilde{r} . Les deux solutions \tilde{r}_+ et \tilde{r}_- de (13) nous donnent donc les distances minimale et maximale de la planète au soleil.

3) Soient v_m et v_D les vitesses minimale et maximale de la particule sur la trajectoire elliptique. Soient r_m et r_D les distances minimale et maximale entre la particule et la source du champ de force. On sait par la conservation du moment cinétique (voir question 2) ci-dessus) que l'on a la relation

$$r_D v_m = r_m v_D \quad (14)$$

Or, l'excentricité e de l'orbite elliptique est

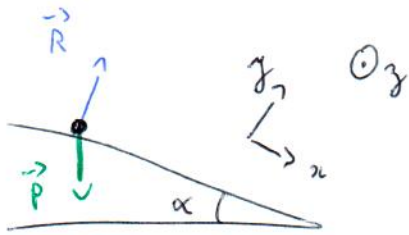
$$e = 1 - \frac{2}{1 + \frac{r_D}{r_m}} = \frac{r_D - r_m}{r_m + r_D} \quad (15)$$

En combinant (14) et (15) on peut donc exprimer e en termes de v_m et v_D , et on a

$$e = \frac{v_D - v_m}{v_m + v_D} \quad (16)$$

Exo 11: un plan incliné fait un angle α avec l'horizontale. Les seuls mouvements envisagés ont lieu le long de la ligne de plus grande pente. On note g l'accélération de la pesanteur.

1) Un point matériel de masse m est mobile sur le plan incliné (P) sans frottement. On suppose qu'il est immobile à l'instant initial $t=0$. Le point matériel



subit deux forces :

i) son poids $\vec{P} = mg \sin \alpha \vec{u}_x - mg \cos \alpha \vec{u}_z$

ii) la réaction normale $\vec{R} = R \vec{u}_z$

dire au plan incliné (P)

Le point matériel se déplace uniquement dans la direction \vec{u}_x , donc le principe fondamental de la dynamique (PFD) pour le point matériel s'écrit

$$m \ddot{x} \vec{u}_x = mg \sin \alpha \vec{u}_x + (R - mg \cos \alpha) \vec{u}_z \quad (1)$$

On en tire donc directement

$$R = mg \cos \alpha \quad (2)$$

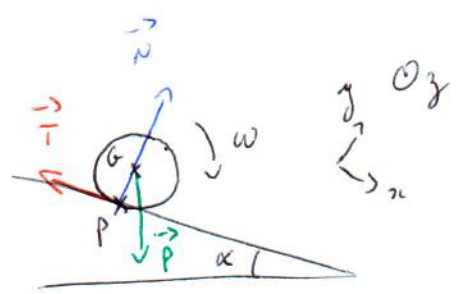
et

$$\ddot{x} = g \sin \alpha \quad (3)$$

On intègre donc (3) pour trouver $x(t)$, et on a, avec les conditions initiales (CI) $x(0) = \dot{x}(0) = 0$,

$$x(t) = \frac{g}{2} \sin \alpha t^2 \quad (4)$$

2) a) Soit maintenant une bille sphérique homogène de rayon r et masse m qui roule sans glisser sur (P). On suppose que la bille est immobile à $t=0$.



le mouvement de la bille est complètement décrit par deux paramètres :

i) la position $x_G(t)$ de son centre de masse (CM) G selon l'axe z au cours du temps \Rightarrow décrit le mouvement de translation de la bille le long de (P)

ii) un angle $\theta(t)$ décrivant la position d'un point quelconque de la bille, différent de G, au cours du temps \Rightarrow décrit le mouvement de rotation de la bille

Trois forces s'exercent sur la bille :

i) son poids $\vec{P} = mg \sin \alpha \vec{u}_z - mg \cos \alpha \vec{u}_y$, qui s'applique au CM G ;

ii) une force de réaction normale $\vec{N} = N \vec{u}_y$, due au plan incliné (P) et s'appliquant au point de contact P entre (P) et la bille ;

iii) une force de réaction tangentielle $\vec{T} = T \vec{u}_x$, également due au contact avec (P) et s'appliquant en P, qui s'oppose au glissement de la bille

le vecteur rotation $\vec{\omega}$ de la bille est donné par

$$\vec{\omega} = -\omega \vec{u}_y = -\dot{\theta} \vec{u}_y \quad (5)$$

On écrit maintenant le théorème du moment cinétique

par rapport au CR G. La projection du moment cinétique \vec{L}_G de la bille par rapport à G est reliée au moment d'inertie $\bar{I}_{(Gz)}$ de la bille par rapport à l'axe (Gz) , avec $\bar{I}_{(Gz)} = \frac{2mr^2}{5}$ (voir série \bar{I} de cinétique), et on a donc, en projetant sur \vec{m}_3 ,

$$\vec{m}_3 \cdot \vec{L}_G = - \frac{2mr^2}{5} \dot{\theta} = - \frac{2mr^2}{5} \dot{\theta} \quad (6)$$

le théorème du moment cinétique, projeté selon \vec{m}_3 , nous donne donc

$$\vec{m}_3 \cdot \dot{\vec{L}}_G = - \frac{2mr^2}{5} \ddot{\theta} = \vec{N}_G^{(ext)} \cdot \vec{m}_3 \quad (7)$$

avec le moment des forces

$$\vec{N}_G^{(ext)} = \cancel{GG \times P} + \underbrace{GP \times N}_{= \vec{0} \text{ car } GP \parallel N} + GP \times T$$

$$= -r \vec{m}_3 \times T \vec{m}_n = -rT (-\vec{m}_3)$$

et donc

$$\vec{N}_G^{(ext)} = rT \vec{m}_3 \quad (8)$$

On tire donc de (7) et (8)

$$T = - \frac{2mr}{5} \ddot{\theta} \quad (9)$$

Ensuite, la distance dx_G parcourue par G en son temps dt est donnée par $dx_G = r d\theta$, soit

$$\dot{x}_G = r \dot{\theta}$$

et donc en dérivant par rapport au temps

$$\ddot{x}_G = r \ddot{\theta}$$

d'où, avec (9), (10)

$$m \ddot{x}_G = - \frac{5}{2} T$$

On applique maintenant le PFD pour le CG selon x
pour avoir, avec (10),

$$m \ddot{x}_G = mg \sin \alpha + T \stackrel{(10)}{=} - \frac{5}{2} T$$

d'où l'expression suivante de la force tangentielle

$$T = - \frac{2}{7} mg \sin \alpha \quad (11)$$

On peut donc récrire le PFD pour G sous la forme,
avec (11),

$$m \ddot{x}_G = mg \sin \alpha - \frac{2}{7} mg \sin \alpha = \frac{5}{7} mg \sin \alpha$$

et donc (12)

$$\ddot{x}_G = g' \sin \alpha$$

où l'on a défini (13)

$$g' \equiv \frac{5}{7} g$$

On note que l'équation d'évolution (12) du CG de
la bille est similaire à l'équation d'évolution (3) du
point matériel, pour une accélération de la pesanteur
effective g' donnée par (13).

b) Pour l'instant on a écrit le théorème du moment cinétique et le PFD pour le CD G selon x , ce qui nous a permis de déterminer l'amplitude T de la force de réaction tangentielle. On écrit maintenant le PFD pour G selon y pour obtenir la réaction normale N . Puisque G ne se déplace pas selon y , on a

$$0 = -mg \cos \alpha + N$$

d'où directement

$$N = mg \cos \alpha \quad (14)$$

Maintenant, la condition de roulement sans glissement s'exprime sous la forme

$$\left| \frac{T}{N} \right| < f_s \quad , \quad \text{condition roulement sans glissement}$$

avec f_s le coefficient de frottement statique. Or, on connaît T et N , données par (11) et (14), d'où

$$\left| \frac{T}{N} \right| = \frac{7}{7} \tan \alpha < f_s$$

$$\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

ce qui nous donne donc la condition

$$\alpha < \arctan \frac{7f_s}{2} \quad (15)$$

pour le roulement sans glissement. Ainsi, il existe bien un angle limite α_c tel que si $\alpha < \alpha_c$ la bille roule sans glisser, et on a

$$\alpha_c = \arctan \frac{\mu_s}{2} \quad (16)$$

c) Supposons maintenant que $\alpha > \alpha_c$. Dans ce cas la bille roule en glissant et la force tangentielle T_f de réaction avec (P) est la force de frottement donnée par

$$|T_f| = \mu_d N \quad (17)$$

avec μ_d le coefficient de frottement dynamique. Or, le PFD pour le CG selon y ne change pas, et on a toujours pour la réaction normale (voir (14) ci-dessus)

$$N = mg \cos \alpha$$

d'où la force de frottement

$$\vec{T}_f = - \mu_d mg \cos \alpha \vec{u}_x \quad (18)$$

où le signe \ominus provient du fait que la force de frottement doit s'opposer à la composante selon x du poids. On a donc le PFD selon x

$$m \ddot{x}_G = mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha = mg (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$$

d'où, en intégrant et avec les CE $x_G(0) = \dot{x}_G(0) = 0$,

$$x_G(t) = \frac{g}{2} (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) t^2 \quad (19)$$